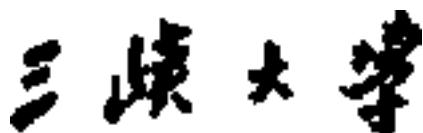


分类号 TH122  
U D C 621

密级 公开



硕 士 学 位 论 文

基于拓扑优化与均匀化理论的材料微  
结构设计方法研究

学 位 申 请 人： 张严

学 科 专 业： 机械设计及理论

指 导 教 师： 杜义贤 副教授

二〇一六年五月

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the  
Degree of Master of Science in Engineering

**Research of Design Method of Material Microstructure  
Based on Topology Optimization and Homogenization  
Theory**

Graduate Student: Zhang Yan  
Major: Mechanical design and theory  
Supervisor: Associate Prof. Du Yixian

**China Three Gorges University**  
Yichang, 443002, P.R.China  
May, 2016

## 三峡大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果，除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体均已在文中以明确方式标明，本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：\_\_\_\_\_

日 期：\_\_\_\_\_

## 内 容 摘 要

材料的微观结构对其宏观性能有显著的影响,通过对材料的微观结构进行优化设计,可以获得具有特殊宏观性能的材料。本文基于均匀化理论求解微结构的等效弹性性能,利用拓扑优化技术对材料的微观构型进行优化设计,以得到具有极限弹性性能和极限负泊松比特性的微观构型。

首先,基于均匀化理论求解材料微结构的等效弹性矩阵,为利用成熟的拓扑优化技术,将基于均匀化理论的等效弹性矩阵表达成基于应变能等效的能量表达式,通过与相关权威文献的计算结果进行对比,以验证本文基于能量均匀化方法求解材料微结构等效弹性性能的正确性和有效性。相关数值算例表明,对于材料组分比相同但截取自不同周期性结构的不同微结构单胞,其等效弹性性能差异明显,但不同的网格数目对等效弹性性能的影响足以忽略,对于截取自同一周期性结构的不同微结构单胞具有完全相同的等效弹性性能。

然后,基于改进的 **SIMP** 材料插值模型,以微结构的等效弹性矩阵中的某项或某几项加权组合最大作为优化目标,以材料组分比为约束,实现了具有最大水平抗拉压刚度、最大竖直抗拉压刚度、最大抗剪切刚度、最大水平竖直双向模量之和以及最大体积模量的材料微结构的最优拓扑构型设计。分析表明,对于较简单的优化目标,如水平抗拉压刚度最大、竖直抗拉压刚度最大、抗剪切刚度最大、水平竖直双向模量之和最大,不同材料组份比和网格数目对最优拓扑构型、等效弹性矩阵及优化目标值的影响较小,对于较复杂的目标,如体积模量最大,不同材料组分比和网格数目对最优拓扑构型、等效弹性矩阵的影响较大,但对其最优目标值的影响较小;不同初始结构布局下的最优拓扑构型和等效弹性矩阵差异明显,特别对于如体积模量最大这种较复杂的目标,但其最优目标值差异较小,表明初始结构布局对材料微结构的最优拓扑构型具有指引性作用,并使其优化迭代过程稳定。

最后,通过预先设定目标弹性矩阵,采取优化目标与预先设定目标平方差的加权组合最小为优化目标,以材料组份比为约束,实现了具有极限负泊松比的材料微结构构型的优化设计。分析表明,不同材料组份比下的最优拓扑构型与等效弹性矩阵差异明显,但其优化目标值  $\mu$  的差异较小,在不同网格数目下的最优拓扑构型、等效弹性矩阵及优化目标值  $\mu$  的差异均较小;不同初始结构布局对材料微结构的最优拓扑构型具有指引性作用,并使其优化迭代过程稳定。

**关键词:** 拓扑优化   能量均匀化   材料微结构   极限弹性性能   极限负泊松比

## Abstract

The microstructure of materials have significant effect on the macro properties, the materials with special macro-properties can be obtained by the optimal design to the material microscopic structure. In this paper, based on the homogenization theory, the equivalent elastic properties of microstructure is to solve, the extreme elastic performance and extreme negative poisson's ratio characteristics of the micro-configurations can be obtained by the topology optimization technology.

Based on the homogenization theory, the equivalent elastic matrix of the material microstructure is to solve, in order to make use of the mature topology optimization technology, the equivalent elastic matrix based on the homogenization theory is expressed by the one based on the strain energy equivalent energy method. By comparing the calculation results with the related authoritative literature, the correctness and validity of the solution to the equivalent elastic performance of material microstructure based on energy equalization method is verified. some relevant numerical example shows that the material's volume of the microstructure are the same but the different microstructure unit cell from different periodic structure, the equivalent elastic performance of the microstructure is obviously different, the influence of the different number of grid on the equivalent elastic properties is small enough so that can be ignored, and the different microstructure unit cell from the same periodic structure have the same equivalent elastic properties.

Based on the modified SIMP interpolation model, with the goal of maximizing the one or several of the weighted combination of the equivalent elastic matrix of the microstructure, to the material's volume rate as the constraint, the optimal topology configuration of material microstructure is achieved which has the maximum horizontal axial rigidity, the maximum vertical axial rigidity, the maximum shear stiffness, the maximum sum of horizontal and vertical modulus and the maximum bulk modulus. The analysis result shows that for a simple optimization goal such as the maximum horizontal axial rigidity, the maximum vertical axial rigidity, the maximum shear stiffness, the maximum sum of horizontal and vertical modulus, the material's volume and the number of grid has little influence on the optimal topology configuration and the equivalent elastic matrix and the optimization value. And for a more complex optimization goal such as the maximum bulk modulus, the material's volume and the number of grid has significantly

influence on the optimal topology configuration and the equivalent elastic matrix, but has little influence on the optimization value. The optimal topology configuration and the equivalent elastic matrix under different initial layout is obviously different, and the difference of the optimization values is less obvious, Especially for this more complex optimization goal such as the maximum bulk modulus, and all above that indicates the initial layout has guidance function on the optimal topology configuration of material microstructure and make the iteration process stable.

Finally, by presetting the target elastic matrix, with the goal of minimizing the weight combination of the square error of the optimized target and the preset target, to the material's volume rate as the constraint, the optimal topology configuration of material microstructure is achieved which has extreme negative poisson's ratio. The analysis result shows that the optimal topology configuration and the equivalent elastic matrix of the different material's volume is obviously different, the difference of the optimization value is less obvious, but the optimal topology configuration, the equivalent elastic matrix and the optimization value all is less obvious. The initial layout has guidance function on the optimal topology configuration of material microstructure and make the iteration process stable.

**Keywords: topology optimization; energy equalization method; material microstructure; extreme elastic properties; extreme negative poisson's ratio;**

# 目 录

引 言 .....	1
1 绪论 .....	2
1.1 课题来源 .....	2
1.2 研究背景与意义 .....	2
1.3 国内外研究现状 .....	2
1.4 研究内容及组织结构 .....	6
2 基于能量均匀化的弹性矩阵等效方法 .....	8
2.1 引言 .....	8
2.2 均匀化理论 .....	8
2.3 材料微结构的等效性能求解 .....	12
2.4 数值算例分析与讨论 .....	14
2.5 本章小结 .....	18
3 具有极限弹性性能的材料微结构拓扑优化 .....	20
3.1 引言 .....	20
3.2 材料微结构的拓扑优化数学模型及敏度分析 .....	20
3.3 具有极限弹性性能微结构的优化实施步骤 .....	24
3.4 数值算例分析与讨论 .....	25
3.5 本章小结 .....	46
4 具有极限负泊松比的材料微结构拓扑优化 .....	48
4.1 引言 .....	48
4.2 具有极限负泊松比的微结构拓扑优化数学模型及敏度分析 .....	49
4.3 具有极限负泊松比材料微结构的优化实施步骤 .....	50
4.4 数值算例分析与讨论 .....	51
4.5 本章小结 .....	61
5 总结和展望 .....	62
5.1 全文总结 .....	62
5.2 研究展望 .....	63
参 考 文 献 .....	64
后 记 .....	68
附录：攻读硕士学位期间发表的部分学术论著 .....	70

## 引 言

高技术的发展对材料的属性提出了越来越高的要求,而某些属性已超出了自然界所能提供的范围,复合材料因具有传统材料所不具备的优良性能,如质量轻、比强度高、比模量大等优点,而被广泛应用于航空、航天、高端武器装备、精密机械设备等工程领域。由于复合材料良好的可设计性,可以通过设计特定或极限性能的材料来替代传统材料。复合材料在细观尺度上的最小重复单元称为其微结构,工程上考虑的往往是复合材料的宏观力学性能,然而复合材料的微观结构对其宏观力学性能有很大影响,通过对微观结构的构型进行优化设计可以获得具有特定或极限宏观性能的材料,如具有极限弹性性能、极限负泊松比、零或负热膨胀系数、极端热传导性能的复合材料。本文基于应变能等效的能量均匀化方法求解微结构的等效弹性性能,利用成熟的拓扑优化技术对材料的微观构型进行优化设计,以得到具有极限弹性性能和极限负泊松比特性的微观构型,其研究成果有助于突破传统材料、结构优化的局限,充分发掘材料的潜力,从设计的角度提高材料性能。



## 1 绪论

### 1.1 课题来源

本课题得到湖北省对外科技合作项目“基于拓扑优化方法的材料-结构的多尺度创成式设计技术研究”(2015BHE026)的资助。

### 1.2 研究背景与意义

由两种或以上不同性能、不同形态的原材料复合而成的材料,称为复合材料。因为组分材料之间可以相互补充,复合材料具有传统材料所不具备的优良性能<sup>[1]</sup>,如质量轻、比强度高、比模量大、可设计性等优点,因而广泛地应用于航天、航空、汽车、建筑、化工和体育器材等领域。此外,复合材料还具有良好的可设计性,可以设计特定性能的材料来代替传统材料。例如可设计具有高性能比的材料用于工程结构如在航空航天、高端武器装备、精密机械仪器等领域中;或是特殊热弹性性能材料如“零膨胀”材料用于高精度仪器如微纳米测量仪器中,以减少温度对测量精度的影响<sup>[2,3]</sup>。

材料在细观尺度上最小的重复性单元称为其微结构。工程上考虑的往往是复合材料的宏观力学性能,然而其微结构可以影响其宏观性能并对材料失效的检测和材料设计等有着关键的作用<sup>[4]</sup>。对微结构的拓扑优化设计问题可分为两种<sup>[5]</sup>:一是使材料满足给定性能的最小体积含量问题,如零泊松比材料设计问题,负热膨胀系数材料设计问题;二是满足一定材料体积约束和对称边界条件下,具有极端性能的材料微结构构型问题,如极端弹性性能材料设计、极端导热性能材料设计。材料的设计问题与材料的优化问题息息相关。通过对复合材料微观构型的优化设计获得具有特殊性能的复合材料已成为目前材料领域科研工作者研究的热点。复合材料的定量设计与优化已经成为目前材料设计的重点研究对象之一。它不但可以应用于复合材料的设计与制造,还可为材料科学的研究提供力学的理论依据<sup>[4]</sup>。

基于上述分析,本课题拟基于均匀化理论求解材料微结构的等效弹性性能,利用拓扑优化技术对材料微观结构进行优化设计,以得到具有极限物理特性的微观构型。研究成果有助于突破传统材料、结构优化的局限,充分挖掘材料潜力,从设计的角度提高材料性能。因此,本课题无论从理论上、还是工程应用上均有重要的研究意义和价值。

### 1.3 国内外研究现状

#### 1.3.1 材料微结构等效性能预测的研究现状

复合材料具有优于常规材料的性能,在工程领域被广泛应用,由于其组分、体积分数、几何分布形态以及界面等具有多样性和复杂性,使其力学性能的实验研究因受到制备,加工条件等的影响而具有一定的局限性<sup>[6]</sup>。因而复合材料的等效力学性能预测的理论研究具有重要意义,也成为了广大科研工作者的研究热点,目前也取得了较

多的研究成果。

对复合材料等效弹性性能的理论预测研究由来已久,从最基本的复合材料等效性能的 Voigt-Reuss 上下限<sup>[7,8]</sup>,到更为精确的二维各向同性复合材料的 Hill-Hashin<sup>[9,10]</sup>上下限和三维各向同性复合材料的 Hashin-Shtrikman<sup>[11]</sup>上下限,即复合材料等效弹性模量的混合律计算公式,这些公式都只涉及到复合材料各组分的性能及其体分比,所以其结果也是比较粗糙和近似的;后来这些等效弹性性能的上下限发展为更为复杂的各向异性复合材料等效性能的上下限预测<sup>[12,13]</sup>,如 Torquato 等<sup>[14]</sup>引入  $n$  点修正函数,使得各向异性材料等效性能预测的上下限取得了进一步的发展。而复合材料等效弹性性能的精确预测方法与理论更是大家研究的重点,1957 年英国科学家 Eshelby 等<sup>[15]</sup>利用等效夹杂理论计算了由各向同性材料组成的复合材料的等效弹性性能;Budiansky<sup>[16]</sup>和 Hill<sup>[17]</sup>进一步发展了自洽方法,将其推广到多相复合材料的等效弹性模量;在此基础上,Christensen 和 Lo<sup>[18]</sup>给出了球形颗粒及长纤维增强复合材料的等效弹性模量;另外较为成熟的理论还有 Mori-Tanaka<sup>[19]</sup>方法和微分介质方法<sup>[20]</sup>。Mori-Tanaka 方法可用于计算含有相应变夹杂的材料基体中的平均应力,该方法实质上与 Eshelby 等效夹杂理论相似,由于该方法计算简单,被广泛用于各种异质复合材料等效性能的预测;微分法的基本过程为:假设有一体积为  $V_0$  的均质基体材料,其弹性常数张量为  $L_0$ ,首先从这一均匀介质中取出体积为  $\delta V$  的材料,同时在该基体介质中均匀地嵌入同样体积的增强颗粒材料,从而形成的复合材料的等效模量为  $L_0 + \delta L$ ,然后以有相同弹性模量的复合材料为均匀介质,继续上述“取出-添入”的过程,最终使复合材料中增强相的含量达到要求的定值为止。

上述等效性能的预测方法往往是建立简化的物理模型或基于近似的假设。与这些方法不同,二十世纪七十年代发展起来的均匀化方法<sup>[21]</sup>是一种严格的数学方法,属于多尺度摄动方法的范畴。它是根据复合材料微观周期性的特点,以连续介质理论为基础,采用扰动理论,将物理场按表征微观结构尺度的相关小参数进行渐近展开,得到材料的宏观属性,既能从微观尺度分析材料的等效模量和变形,又能从宏观尺度分析结构的响应。国内外研究人员利用均匀化技术相继实现了复合材料等效弹性性能、热膨胀性能及热传导性能的预测<sup>[22,23,24,25]</sup>。

## 1.3.2 材料微结构拓扑优化的研究现状

拓扑优化作为当前结构设计领域最具有挑战性的研究课题,涉及到数学、力学、机械、计算机技术和材料科学等多个学科,被认为是结构初始设计阶段确定材料布局的最有效方法,可为高层次的设计者提供产品结构的概念设计,降低设计周期<sup>[26]</sup>。拓扑优化方法既能优化宏观结构也可以优化材料的微观构型,从而进一步的利用材料的潜在性能,消除材料、结构的界限,并对隔热防震技术、汽车工程材料、航空航天飞

行器与风力发电装置等相关高科技工业应用领域的发展产生了巨大的推动作用。

在国外, 拓扑优化已经成为一个炙手可热的研究方向。如丹麦科技大学<sup>[27]</sup>已经建立 TOP-OPT 拓扑优化软件系统来实施航天科研卫星发射系统的研究; 美国 Altair 公司将拓扑优化技术用于汽车发动机的承重构架设计; Sigmund<sup>[28]</sup>将拓扑技术用于微驱动器领域, 设计出了单自由度柔性机构以及双自由度驱动器; Emilio 等<sup>[29]</sup>利用均匀化拓扑优化方法对三维压电复合材料的单胞进行了优化设计。在国内, 拓扑优化技术也在各领域得到广泛的应用。张卫红等<sup>[30]</sup>将多目标拓扑优化技术应用于航空薄壳结构的布局设计, 赵敏等<sup>[31]</sup>将拓扑优化设计方法应用于水下耐压结构的优化设计, 聂昕等<sup>[32]</sup>将耐撞性拓扑优化方法应用于车辆的实际开发过程中。拓扑优化技术在宏观结构的优化设计方面已相当成熟, 而在复合材料微结构的优化设计以及材料/结构一体化设计方面的研究仍是一个新兴的领域, 且相关应用广泛, 已成为材料与结构领域科研工作者的研究热点。

复合材料的宏观性能依赖于材料微观结构的构型及其各组分性能, 通过对微观结构的具体构型进行优化设计可以获得具有各组分所不具备的性能, 得到具有极限性能的宏观复合材料, 如具有负泊松比、零或负热膨胀系数、极端热传导性能的复合材料, 因此对微观结构构型的优化设计受到了广泛的关注<sup>[33]</sup>。

复合材料微观结构的优化设计最早进入拓扑优化领域是在二十世纪 80 年代, 由 Lakes<sup>[34]</sup>提出具有负泊松比的泡沫材料以及通过不同材料组合可以获得零膨胀系数、零剪切性能等极端性能材料开始的。二十世纪 90 年代 Sigmund<sup>[35,36]</sup>提出了复合材料微结构拓扑优化设计理论, 并采用逆均匀化方法实现了工程中所需材料的特定宏观性能的微结构构型优化, 并在数值研究和实验验证上取得了成功, 促进了微结构设计理论和技术的发展, 使其成为世界范围内的一个研究热点并取得了许多成果。而在 2002 年的第 9 届 AIAA 年会上 Kalidindi 等人<sup>[37]</sup>提出了“微结构灵敏设计 (MSD-Microstructure Sensitive Design)”概念, 进一步完善与发展了微结构构型与组分优化设计的思想与体系, 将材料微结构设计的内涵提高到一个新的高度。这些开创性的研究作为复合材料与结构的拓扑优化设计奠定了坚实的基础, 进一步促进了材料微结构的优化设计。

目前, 复合材料微结构的拓扑优化设计主要是基于逆均匀化理论, 寻求满足一定约束条件下的材料布局, 大体可以分为两类: 一是满足给定性能的材料用量最小问题; 一是满足体积约束和其它约束条件的具有最优性能的材料优化设计。针对上述两种情况国内外学者都做了大量的工作<sup>[38]</sup>。

Sigmund<sup>[39]</sup>针对材料的弹性性能, 实现了给定弹性性能的材料微结构优化设计。Vemaganti 等<sup>[40]</sup>以材料用量最少为目标, 实现了给定等效弹性性能的材料设计, 但其

优化构型中间密度较多,材料的拉伸模量较低。Gibiansky 和 Sigmund<sup>[41]</sup>进行具有极端体积模量的多相复合材料设计,设计得到微结构的等效体积模量接近于 Hashin-Shtrikman 的上限。Nevesl 等<sup>[42]</sup>利用移动渐进法,在给定材料用量的约束下开展了具有极端剪切模量的微结构优化设计,并讨论了材料用量对复合材料微结构构型的影响。Silva 等<sup>[43]</sup>基于均匀化方法展开了具有极端性能的二维和三维压电材料的优化设计。James 等<sup>[44]</sup>通过对具有最大刚度和流体渗透性的微结构进行设计,实现了材料多功能优化,Huang 等<sup>[45]</sup>基于双向渐进结构优化法实现了具有最大剪切模量和最大体积模量的微结构拓扑优化。Sigmund<sup>[46]</sup>采用均匀化理论预测复合材料的等效热膨胀性能,详尽地探讨了优化过程中存在的问题,并利用三相材料进行了具有零或负热膨胀系数的材料优化设计。Qi 和 Kikuchi<sup>[47]</sup>研究了具有给定热膨胀性能和材料体积分数的三相复合材料优化问题,并研究了优化设计得到的具有负热膨胀系数的材料微结构边界光滑问题。

此外,国内的科研工作者在复合材料等效性能及微结构的优化设计上也进行了大量的研究工作,如袁振、吴长春等<sup>[5]</sup>进行了极端弹性性能的二维和三维压电材料的优化设计,杨卫等<sup>[48]</sup>采用优化准则法进行具有特定性能的微结构设计,实现了具有负泊松比的材料设计。张卫红等<sup>[49]</sup>基于应变能等效的能量法实现了材料微结构的等效弹性性能的预测,采用对偶凸规划方法结合周长约束策略进行了微结构构型优化设计。针对传热性能的微结构优化设计,张卫红等<sup>[50,51]</sup>基于均匀化方法进行材料的热传导性能预测,在给定材料用量下进行复合材料的设计,得到具有极端热传导性能的复合材料。针对具有特定热膨胀系数的微结构优化设计,刘书田等<sup>[3]</sup>进行了具有零膨胀系数的材料设计,并用数值方法验证了材料的等效热膨胀系数。程耿东<sup>[52]</sup>利用均匀化方法预测了复合材料导热性能,并分析了复合材料的热膨胀行为<sup>[53]</sup>。在这些研究基础上,袁振<sup>[5]</sup>开展了在给定材料组分下极端弹性性能的复合材料优化设计。刘书田等<sup>[54]</sup>进行了具有零泊松比性能的两相复合材料的微结构优化设计研究,包括组分和构型并行设计。赵康等<sup>[55]</sup>则基于拓扑描述函数研究了特定性能复合材料优化设计问题。王宝来等<sup>[56]</sup>针对轻质材料利用拓扑优化技术实现了最刚微结构的构型设计,王宪杰等<sup>[57,58]</sup>利用双向渐进结构优化方法实现了基于宏观性能的微观多孔材料拓扑优化设计,刘远东<sup>[59]</sup>针对复合材料的综合性能问题,对周期性正交各向异性材料,将均匀化方法和有限元技术相结合,以材料微结构的等效弹性性能组合(矩阵元素加权和)为优化目标,实现了微结构的多目标优化。

综上所述,复合材料的微观结构设计目的与宏观结构设计一样,都是为了得到能适应于不同工况且满足性能要求的材料和结构,通过对复合材料微结构的优化设计可以获得具有独特宏观性能的材料,如负泊松比、零、负膨胀系数,从而满足不同工况



对结构的性能要求。本文采用变密度法插值模型，为能利用成熟的拓扑优化技术，将用均匀化方法求解得到的微结构的等效弹性性能表达成基于应变能等效的能量表达式来进行微结构的优化设计，以得到具有极限性能的材料微结构构型。

## 1.4 研究内容及组织结构

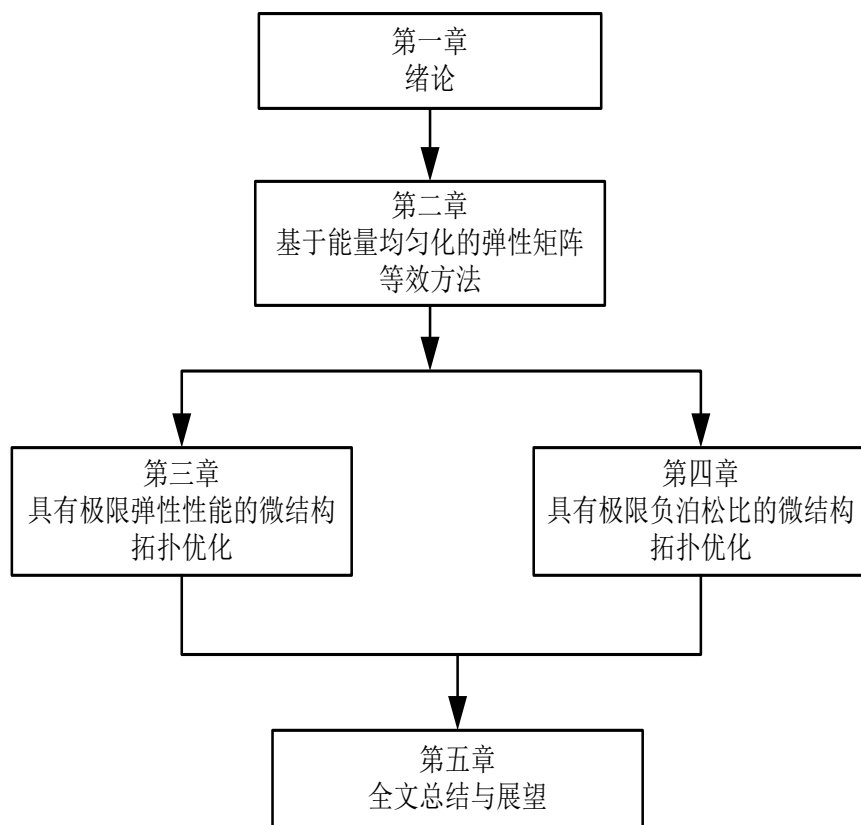


图 1.1 文章组织结构图

为了充分利用复合材料质量轻、比强度高、比模量大、可设计性等优点，得到具有极限性能的复合材料，本文以能量均匀化方法为基础，结合有限元理论，并利用成熟的拓扑优化技术对宏观结构的微结构单胞进行拓扑优化设计，以得到具有极限性能的材料微结构构型，实现宏观结构的轻质高强设计。

第一章：简述了本文的研究背景与意义，概述了材料微结构等效性能预测的研究进展及现状，介绍了材料微结构拓扑优化的研究进展及现状。

第二章：基于均匀化理论推导了材料微结构的等效弹性性能的求解过程，为能利用成熟的拓扑优化技术，将基于均匀化理论的等效弹性性能表达成基于应变能等效的能量表达式，通过与相关权威文献的计算结果进行对比，验证了本文基于能量均匀化方法求解材料微结构等效弹性性能的正确性和有效性。

第三章：基于 SIMP 材料插值模型，以材料微结构的等效弹性系数矩阵中的某项或某几项分量加权组合最大作为优化的具体目标，以材料组分比为约束，实现了具有

最大水平抗拉压刚度、最大竖直抗拉压刚度、最大抗剪切刚度、最大水平竖直双向模量之和以及最大体积模量的材料微结构的最优拓扑构型设计。并分析了不同材料组份比、不同网格数目以及不同的初始结构布局对微结构最优拓扑构型、等效弹性矩阵、优化目标值以及优化迭代过程的影响。

第四章：对于  $\mu = -1$  这种高度非线性的优化目标，本文通过预先设定目标弹性矩阵，采取优化目标与预先设定目标差的平方和加权组合最小为优化目标，以材料组份比为约束，实现了具有极限负泊松比的材料微结构构型的优化设计。并分析了不同材料组份比、不同网格数目以及不同的初始结构布局对微结构最优拓扑构型、等效弹性矩阵、优化目标值以及优化迭代过程的影响。

第五章：全文工作总结与研究展望。

## 2 基于能量均匀化的弹性矩阵等效方法

### 2.1 引言

经典的均匀化方法以连续介质理论为基础，采用扰动理论将物理场按表征微观结构尺度的小参数进行渐进展开，是一种常用且有效的预测复合材料等效性能的方法。在理论上，均匀化方法具有严格的数学理论推导，理论基础严谨，与大多数计算力学方法相比，其材料的等效性能预测结果更加接近于实际值；在实际应用中，均匀化方法具备诸多良好特性，如求解局部载荷（如位移、应变）过程简单，且引起的局部误差也较直观。

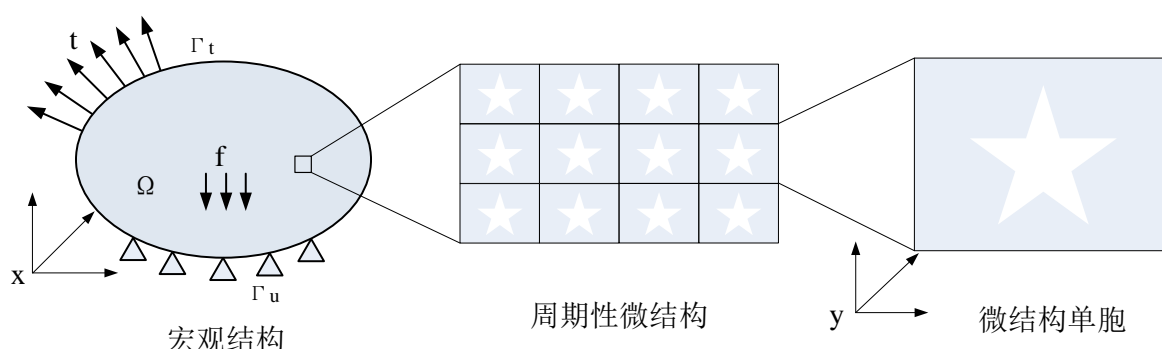
本章将简要介绍渐进均匀化的基本理论，推导材料微结构的等效弹性性能的求解过程，并结合基于应变能等效的能量均匀化方法给出其具体的能量数值表达式，最后以具体的数值算例说明该方法的实施过程，并验证其程序的正确性和可靠性。

### 2.2 均匀化理论

应用均匀化方法预测复合材料的等效性能应基于以下三个基本的假设：1) 材料在物理性能上表现为连续介质；2) 材料在微观结构上表现为规律的周期性；3) 微结构的尺寸远小于其组成结构的尺寸。

当宏观结构受外载荷作用时，宏观结构的各种场变量将随宏观位置的变化而变化，但由于其在细观尺度上微结构的高度非均匀性，使得宏观结构的各种场变量在宏观位置非常小的邻域内也会有很大变化。基于均匀化方法以上三种基本的假设，在如图 2.1 所示的宏观设计域内的任意一处  $x$  区域内，在细观尺度上均可以看成是单胞  $y$  呈周期性重复排列而组成的，并且细观结构的单胞尺度  $y$  相对于宏观结构的尺度  $x$  是一个很小的量  $\mu$ ，即

$$y = x/\mu \quad (0 < \mu \ll 1) \quad (2.1)$$



Ω-宏观区域；f-体积力；t-边界  $\Gamma_t$  上受到的表面力； $\Gamma_u$ -固定位移边界条件

**图 2.1 复合材料周期性结构**

由于微观结构具有周期重复性，因此凡是与  $y = x/\mu$  有关的宏观结构场变量如宏观结构的位移、应力、应变等将转换成对细观坐标的依赖关系，且均具有周期性的双

尺度变化，即是  $Y$  周期性函数。因此，宏观材料结构的特性如等效弹性张量  $D_{ijkl}^H$  可用周期性设计域  $Y$  上微结构的材料特性  $D_{ijkl}$  的函数来表示：

$$D_{ijkl}^\mu(x) = D_{ijkl}(x, y) = D_{ijkl}(x, y + Y) \quad (2.2)$$

同理，对应的结构位移函数  $u$  也可表示为：

$$u(x) = u(x, y) \quad (2.3)$$

基于虚功原理的位移变分方程为

$$\int_{\Omega} D_{ijkl} \frac{\partial u_k^\mu}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i^\mu v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma + \int_S p_i^\mu v_i dS, \quad \forall v \in V \quad (2.4)$$

式中， $v$  表示虚位移场， $V$  是运动学上容许的位移空间。

将上式 (2.4) 中  $u^\mu$  按小参数  $\mu$  进行渐进展开，即

$$u_i^\mu(x, y) = u_i^0(x, y) + \mu u_i^1(x, y) + \mu^2 u_i^2(x, y) + \dots + \mu^n u_i^n(x, y) \quad (2.5)$$

$y = x / \mu$

任意的空间变量  $\phi^\mu$  是一个与  $y$  相关的函数，其具体的表达式为：

$$\phi^\mu(x) = \phi(x, y) \quad (y = x / \mu) \quad (2.6)$$

对其进行微分，则有

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi^\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \quad (2.7)$$

将式 (2.7) 和式 (2.5) 代入控制方程 (2.4)，并化简可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_{ijkl}^\mu \left\{ \mu^{-2} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \mu^{-1} \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] + \right. \\ \left. \mu^0 \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] + \dots \right\} d\Omega \\ = \int_{\Omega} f_i^\mu v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma + \int_S p_i^\mu v_i dS \end{aligned} \quad (2.8)$$

由于式 (2.8) 对于任意  $\mu$  都成立，则式 (2.8) 可分解成如下几个等式

$$\mu^{-2} \int_{\Omega} D_{ijkl}^\mu \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} d\Omega = 0 \quad (2.9)$$

$$\mu^{-1} \int_{\Omega} D_{ijkl} \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] d\Omega = 0 \quad (2.10)$$



$$\begin{aligned} & \mu^0 \int_{\Omega} D_{ijkl} \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} f_i^{\mu} v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma + \int_S p_i^{\mu} v_i dS \end{aligned} \quad (2.11)$$

对于任意的 Y 周期函数  $\phi^{\mu}(x) = \phi(x, y)$  ( $y = x / \mu$ )，当  $\mu \rightarrow 0$  时，有

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int_{\Omega^{\mu}} \phi^{\mu}(x) d\Omega^{\mu} = \frac{1}{|Y^{\mu}|} \int_{\Omega^{\mu}} \int_{Y^{\mu}} \phi(y) dY^{\mu} d\Omega^{\mu} \quad (2.12)$$

将式 (2.12) 代入式 (2.9) - (2.11) 有

$$\frac{1}{|Y^{\mu}|} \int_{\Omega^{\mu}} \int_{Y^{\mu}} D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY^{\mu} d\Omega^{\mu} = 0 \quad (2.13)$$

$$\int_{\Omega^{\mu}} \left\{ \frac{1}{|Y^{\mu}|} \int_{Y^{\mu}} D_{ijkl} \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dY^{\mu} \right\} d\Omega^{\mu} = 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{\mu}} \left\{ \frac{1}{|Y^{\mu}|} \int_{Y^{\mu}} D_{ijkl} \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] dY^{\mu} \right\} d\Omega^{\mu} \\ &= \int_{\Omega^{\mu}} \left( \frac{1}{|Y^{\mu}|} \int_{Y^{\mu}} f_i dY^{\mu} \right) v_i d\Omega^{\mu} + \int_{\Omega^{\mu}} \left( \frac{1}{|Y^{\mu}|} \int_{\Gamma_t} t_i d\Gamma \right) v_i d\Omega^{\mu} + \\ & \int_{\Omega^{\mu}} \left( \frac{1}{|Y^{\mu}|} \int_{Y^{\mu}} \left( D_{ijkl} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y_l} \right) dY^{\mu} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega^{\mu} \end{aligned} \quad (2.15)$$

由于  $v$  是任意的，式 (2.13) 成立则必须满足  $D_{ijkl} \partial u_k^0 / \partial y_l = 0$ ，即

$$u^0 = u^0(x) \quad (2.16)$$

从式 (2.16) 中可以看出  $u^0$  与细观尺度  $y$  是无关的，只与宏观尺度  $x$  有关系，将式 (2.16) 代入式 (2.14) 中，可得

$$\int_{Y^{\mu}} D_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY^{\mu} = 0 \quad (2.17)$$

在宏观尺度上，对于式 (2.15)，若取  $v = v(x)$  ( $\partial v_i / \partial y_j = 0$ )，即  $v$  只是宏观尺度  $x$  的函数，与细观尺度  $y$  无关，则有宏观平衡方程

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^\mu} \left[ \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{Y^\mu} D_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY^\mu \right] d\Omega^\mu \\
 &= \int_{\Omega^\mu} \left( \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{Y^\mu} f_i dY^\mu \right) v_i d\Omega^\mu + \int_{\Omega^\mu} \left( \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{\Gamma_i} t_i d\Gamma \right) v_i d\Omega^\mu + \\
 & \int_{\Omega^\mu} \left( \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{Y^\mu} \left( D_{ijkl} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y_l} \right) dY^\mu \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega^\mu
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

同理，在细观尺度上，对于式 (2.15)，若取  $v = v(y)$  ( $\partial v_i / \partial x_j = 0$ )，即  $v$  只是细观尺度  $y$  的函数，与宏观尺度  $x$  无关，则有细观平衡方程

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^\mu} \left[ \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{Y^\mu} D_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY^\mu \right] d\Omega^\mu \\
 &= \int_{\Omega^\mu} \left( \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{Y^\mu} f_i dY^\mu \right) v_i d\Omega^\mu + \int_{\Omega^\mu} \left( \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{\Gamma_i} t_i d\Gamma \right) v_i d\Omega^\mu + \\
 & \int_{\Omega^\mu} \left( \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{Y^\mu} \left( D_{ijkl} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y_l} \right) dY^\mu \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega^\mu
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

若  $u^0(x)$  已知，则等式 (2.17) 中  $u^1(x, y)$  项可用  $u^0(x)$  和  $Y$  周期函数  $x_i^{kl}(y)$  来表示：

$$u_i^1(x, y) = -x_i^{kl}(y) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \tag{2.20}$$

将式 (2.20) 代入式 (2.17)、(2.18) 可得

$$\int_{Y^\mu} D_{ijmn} \frac{\partial x_m^{kl}}{\partial y_n} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY^\mu = \int_{Y^\mu} D_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY^\mu \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{Y^\mu} \left( D_{ijkl} - D_{ijmn} \frac{\partial x_m^{kl}}{\partial y_n} \right) dY^\mu \right] \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \frac{\partial v_i(x)}{\partial y_j} d\Omega \\
 &= \int_{\Omega^\mu} \left( \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{Y^\mu} f_i dY^\mu \right) v_i d\Omega^\mu + \int_{\Omega^\mu} \left( \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{\Gamma_i} t_i d\Gamma \right) v_i d\Omega^\mu + \\
 & \int_{\Omega^\mu} \left( \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{Y^\mu} \left( D_{ijkl} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y_l} \right) dY^\mu \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega^\mu
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

若令

$$D_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y^\mu|} \int_{Y^\mu} \left( D_{ijkl} - D_{ijmn} \frac{\partial x_m^{kl}}{\partial y_n} \right) dY^\mu \quad (2.23)$$

显然，上式（2.23）中的第一项为材料微结构的体积平均，与材料的组分有关，第二项则反映了材料微结构的具体构型对其等效性能的影响。

将上式（2.23）代入式（2.22），则有

$$\int_{\Omega^\mu} D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \frac{\partial v_i(x)}{\partial y_j} d\Omega = \int_{\Omega^\mu} f_i^\mu v_i d\Omega + \int_{\Gamma_i} t_i v_i d\Gamma + \int_{S^\mu} p_i^\mu v_i dS \quad (2.24)$$

上式(2.24)与基于虚功原理的位移变分方程(2.4)具有相同的形式，说明式(2.24)与式(2.4)描述的是具有相同边界条件的问题。 $D_{ijkl}^H$ 则是复合材料的等效弹性模量。

## 2.3 材料微结构的等效性能求解

根据均匀化理论可知，周期性复合材料的等效弹性张量  $D_{ijkl}^H$  表示均质的线弹性常数，则式（2.23）可表示成如下对称形式<sup>[35]</sup>：

$$D_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( \varepsilon_{pq}^{0(ij)} - \varepsilon_{pq}^{*(ij)} \right) D_{pqrs} \left( \varepsilon_{rs}^{0(kl)} - \varepsilon_{rs}^{*(kl)} \right) dY \quad (2.25)$$

式中， $\varepsilon^0$  表示指定的宏观应变场（水平方向单位应变，竖直方向单位应变，单位剪切应变）， $\varepsilon_{rs}^{*(kl)}$  表示局部变化应变场。

为能利用在结构优化领域较成熟的拓扑优化技术，基于单元应变能，式（2.25）可以写成如下与式（2.25）相等的形式<sup>[35]</sup>：

$$D_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{pqrs} \varepsilon_{pq}^{A(ij)} \varepsilon_{rs}^{A(kl)} dY \quad (2.26)$$

在有限元分析中，单胞被离散成  $N$  个单元，则式（2.26）可被近似表示为

$$D_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \sum_{e=1}^N Q_e^{ij} = \frac{1}{|Y|} \sum_{e=1}^N \left( u_e^{A(ij)} \right)^T k_e u_e^{A(kl)} \quad (2.27)$$

式中， $Q_e^{ij}$  表示单元  $e$  的应变能， $u_e^{A(kl)}$  是与应变场  $\varepsilon^{0(kl)}$  相对应的单元位移场， $k_e$  是单元刚度矩阵，在二维平面问题中，为简化表示，约定下标  $11 \rightarrow 1$ ， $22 \rightarrow 2$ ， $12 \rightarrow 3$ ，则对于二维正交各向异性复合材料的等效弹性矩阵可进一步表示为

$$\begin{bmatrix} D_{11}^H & D_{12}^H & 0 \\ D_{12}^H & D_{22}^H & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

定义材料微结构的应变能为：

$$Q = \int_{\Omega} \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega \quad (2.29)$$

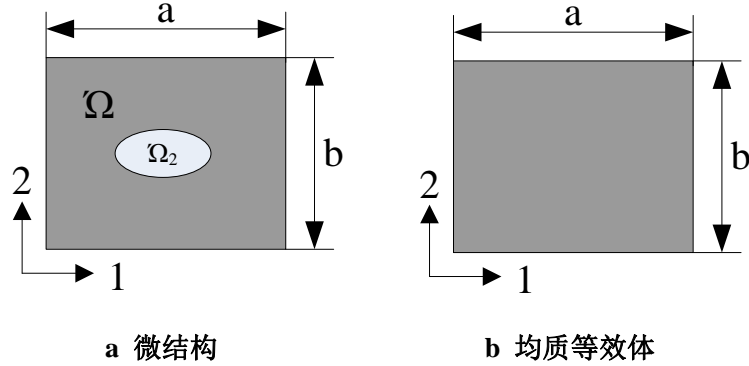


图 2.2 微结构等效示意图

对于图 2.2 (a) 中所示的微观不均匀微结构, 在宏观上可将其等效为等体积的均质等效体, 如图 2.2 (b) 中所示, 则该均质等效体的应力和应变需满足如下关系: (1) 该均质等效体的应力应等于微结构的平均应力, 即  $\bar{\sigma} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \sigma d\Omega$ ; (2) 该均质等效体的应变应等于微结构的平均应变, 即  $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \varepsilon d\Omega$  (式中,  $V$  为微结构的总体积)。若不考虑温度变化对材料微结构性能的影响, 则在均质边界载荷条件下, 材料微结构的应变能与该均质等效体的应变能应是相等的, 由此可得出微结构单位体积的应变能为:

$$\begin{aligned} Q(\varepsilon) &= \frac{1}{V} \int_{\Omega} \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega \\ &= \frac{1}{V} \int_{\Omega} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \varepsilon_{12}) d\Omega \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\sigma}_{22} \bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\sigma}_{12} \bar{\varepsilon}_{12}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

同时, 材料微结构的平均应力和平均应变之间应满足如下广义的胡克定律:

$$\bar{\sigma} = D^H \bar{\varepsilon} \quad (2.31)$$

式中,  $D^H$  称为复合材料的等效弹性系数矩阵。

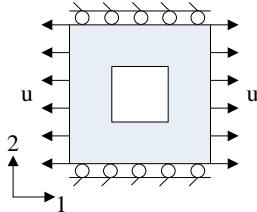
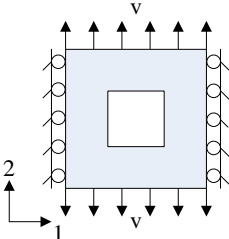
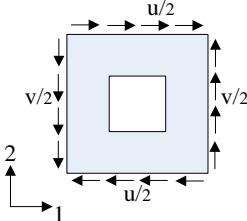
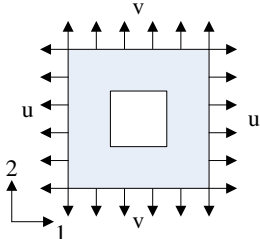
对于二维正交各向异性的复合材料, 式 (2.31) 可进一步表示为:

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111}^H & D_{1122}^H & 0 \\ D_{1122}^H & D_{2222}^H & 0 \\ 0 & 0 & D_{1122}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

式中  $\bar{\sigma}_{11}$ 、 $\bar{\sigma}_{22}$  分别为 1 方向和 2 方向的平均应力,  $\bar{\varepsilon}_{11}$ 、 $\bar{\varepsilon}_{22}$  为相应的平均应变。 $\bar{\sigma}_{12}$ 、 $\bar{\varepsilon}_{12}$  为 1、2 方向的平均剪切应力与剪切应变。

利用式 (2.29)、(2.32)，通过给定材料微结构特定的应变场（或位移边界）等工况条件，便可计算出相应微结构的单位体积应变能，进而推导出微结构的等效弹性模量与微结构的单位体积应变能之间的关系，从而得到微结构的等效弹性模量的具体能量表达式。例如给定微结构的平均应变  $\bar{\varepsilon}^{(1)} = (1 \ 0 \ 0)^T$ （上标代表工况条件编号），由式 (2.32) 可得相应的平均应力  $\bar{\sigma}^{(1)} = (D_{1111}^H \ D_{1122}^H \ 0)^T$ ，将平均应力  $\bar{\sigma}^{(1)}$  和平均应变  $\bar{\varepsilon}^{(1)}$  代入式 (2.29) 可得： $D_{1111}^H = 2Q^{(1)}$ ，这即是基于能量均匀化方法求解微结构的等效弹性性能的基本过程。以图 2.2 所示的平面应力下的单位体积微结构为例（选取  $a = b = 1$ ），通过给定四种特定工况条件下的位移边界条件，便可求解出复合材料微结构的等效弹性性能，如表 1 所示（表中  $u = v = \frac{a}{2} = 0.5$ ）。

**表 2.1 给定的微结构边界条件及相应的应变能**

边界条件				
平均应变	$\bar{\varepsilon}^{(1)} = (1 \ 0 \ 0)^T$	$\bar{\varepsilon}^{(2)} = (0 \ 1 \ 0)^T$	$\bar{\varepsilon}^{(3)} = (0 \ 0 \ 1)^T$	$\bar{\varepsilon}^{(4)} = (1 \ 1 \ 0)^T$
微结构的应变能	$Q^{(1)} = \frac{1}{2} D_{1111}^H$	$Q^{(2)} = \frac{1}{2} D_{2222}^H$	$Q^{(3)} = \frac{1}{2} D_{1212}^H$	$Q^{(4)} = \frac{1}{2} (2D_{1122}^H + D_{1111}^H + D_{2222}^H)$

由表 2.1 中所示的特定工况条件下微结构的应变能表达式，可得复合材料微结构的等效弹性系数矩阵  $D^H$  的具体表达式为：

$$D^H = \begin{bmatrix} 2Q^{(1)} & Q^{(4)} - Q^{(2)} - Q^{(1)} & 0 \\ & 2Q^{(2)} & 0 \\ sym & & 2Q^{(3)} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

## 2.4 数值算例分析与讨论

本节以计算玻璃纤维/环氧树脂两相复合材料的宏观等效弹性张量和具有特定构型微结构的等效弹性张量为例，根据本章所推导的计算公式，采用 Matlab 编写程序进行计算，将计算的结果与参考文献<sup>[60]</sup>的计算结果进行对比，以验证本文计算宏观等效弹性模量公式推导的正确性和有效性，并比较相同组分比下不同网格和不同构型对微结构的等效弹性模量的具体影响。

(1) 玻璃纤维/环氧树脂复合材料的宏观等效弹性性能计算材料的相关属性及组分比如表 2.2 所示。

**表 2.2 材料属性及比例**

材料	弹性模量/GPa	泊松比	比例
环氧树脂基体	3.5	0.35	0.55
玻璃纤维	70	0.2	0.45

参考文献<sup>[60]</sup>中的计算结果为：

$$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} 11.7 & 4.5 & 0 \\ 4.5 & 11.7 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4 \end{bmatrix}$$

根据本章基于能量均匀化方法所推导的材料微结构的宏观等效弹性性能的表达式，在 Matlab 中编写程序的计算结果为：

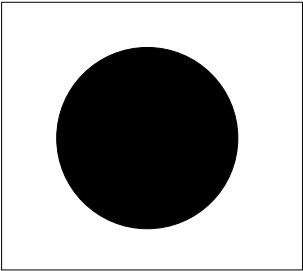
$$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} 11.7 & 4.5 & 0 \\ 4.5 & 11.7 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4 \end{bmatrix}$$

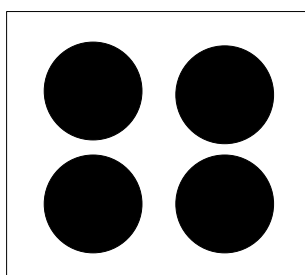
将本章的计算结果与参考文献中的结果进行对比，可看出根据本章所推导的公式所编写的能量均匀化程序的计算结果与参考文献中的计算结果是相同的，说明本章对于复合材料微结构的宏观等效弹性性能的推导过程和结果是正确有效的。

(2) 具有特定构型微结构的等效弹性性能计算

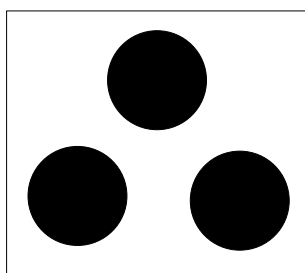
为进一步验证本节材料微结构的宏观等效性能推导公式的正确性和有效性，利用编写的程序计算具有特定构型微结构的等效弹性性能，并将计算结果与参考文献<sup>[60]</sup>中的结果进行对比。特定的微结构构型如表 2.3 所示，其中黑色圆圈处材料为玻璃纤维，白色区域为环氧树脂，两种材料的具体属性如表 2.2 中所示。

**表 2.3 具有特定构型微结构的等效弹性性能验证**

微结构构型	文献结果	本文结果
	$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} 11.7 & 4.5 & 0 \\ 4.5 & 11.7 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4 \end{bmatrix}$	$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} 11.7549 & 4.4173 & 0 \\ 4.4173 & 11.7549 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4569 \end{bmatrix}$



$$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} 12.0 & 4.3 & 0 \\ 4.3 & 12.0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} 12.1312 & 4.3000 & 0 \\ 4.3000 & 12.1312 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5041 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} 12.0 & 4.9 & 0 \\ 4.9 & 11.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} 12.3557 & 4.5006 & 0 \\ 4.5006 & 13.1237 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8364 \end{bmatrix}$$

采用 Matlab 编写的能量均匀化程序的计算结果与参考文献<sup>[58]</sup>的计算结果是大致相同的,说明本章对于复合材料微结构的宏观等效弹性性能的推导过程和结果是正确有效的。(与参考文献的计算结果存在一定差别,主要是由于参考文献中所计算的微结构未给定具体构型尺寸(如微结构构型中黑色圆形区域的半径尺寸、位置尺寸等))

### (3) 相同组分比下不同网格数目和不同构型的计算结果

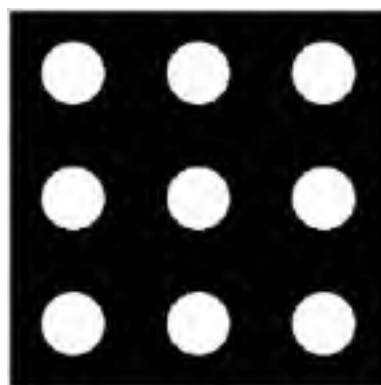

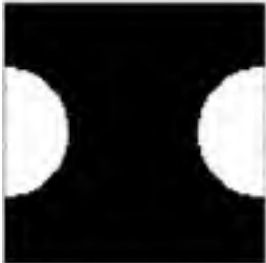




图 2.3 复合材料的周期性结构

如表 2.4 中所示的六种微结构单元,均是由相同材料以及相同材料组分比构成的不同微结构单元,其中微结构单元 a、b 和 c 均是截取自如图 2.3 所示的周期性结构,微结构单元 d、e、f 是与微结构单元 a、b、c 材料组分比相同的不同具体构型的微结构单元。

下面比较这六种微结构单元在不同网格数目和不同构型下的等效弹性模量。微结构单元的尺寸大小为 1x1,如表 2.4 中所示,微结构单元中的黑色区域处的材料属性为弹性模量  $E=100$ 、泊松比  $\mu=0.3$ ,白色区域处表示孔洞区域,即无材料区域,为防止刚度矩阵奇异,取空白区域材料属性为弹性模量  $E=1 \times 10^{-5}$ 、泊松比  $\mu=0.3$ 。

**表 2.4 不同网格和不同构型下微结构的等效弹性性能比较**

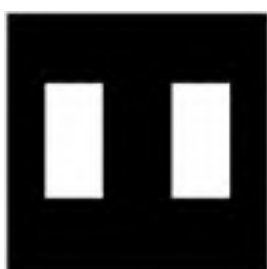
网格数目 微结构构型	80x80	120 x120	160 x160
	$\begin{bmatrix} 76.9863 & 26.5338 & 0 \\ 26.5338 & 76.9863 & 0 \\ 0 & 0 & 19.3184 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 76.9897 & 26.5732 & 0 \\ 26.5732 & 76.9897 & 0 \\ 0 & 0 & 19.3781 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 76.9207 & 26.5511 & 0 \\ 26.5511 & 76.9207 & 0 \\ 0 & 0 & 19.3726 \end{bmatrix}$
微结构单元 a			
	$\begin{bmatrix} 76.9863 & 26.5338 & 0 \\ 26.5338 & 76.9863 & 0 \\ 0 & 0 & 19.3184 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 76.9897 & 26.5732 & 0 \\ 26.5732 & 76.9897 & 0 \\ 0 & 0 & 19.3781 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 76.9207 & 26.5511 & 0 \\ 26.5511 & 76.9207 & 0 \\ 0 & 0 & 19.3726 \end{bmatrix}$
微结构单元 b			
	$\begin{bmatrix} 76.9863 & 26.5338 & 0 \\ 26.5338 & 76.9863 & 0 \\ 0 & 0 & 19.3184 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 76.9897 & 26.5732 & 0 \\ 26.5732 & 76.9897 & 0 \\ 0 & 0 & 19.3781 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 76.9207 & 26.5511 & 0 \\ 26.5511 & 76.9207 & 0 \\ 0 & 0 & 19.3726 \end{bmatrix}$
微结构单元 c			
	$\begin{bmatrix} 69.3587 & 22.7298 & 0 \\ 22.7298 & 78.5800 & 0 \\ 0 & 0 & 14.0453 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 69.2173 & 22.7168 & 0 \\ 22.7168 & 78.9180 & 0 \\ 0 & 0 & 14.1625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 69.0997 & 22.6836 & 0 \\ 22.6836 & 79.0259 & 0 \\ 0 & 0 & 14.1897 \end{bmatrix}$
微结构单元 d			





$$\begin{bmatrix} 72.0416 & 21.0864 & 0 \\ 21.0864 & 72.0416 & 0 \\ 0 & 0 & 14.4428 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 71.9594 & 21.0152 & 0 \\ 21.0152 & 71.9594 & 0 \\ 0 & 0 & 14.3863 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 72.5842 & 21.5434 & 0 \\ 21.5434 & 72.5842 & 0 \\ 0 & 0 & 14.8341 \end{bmatrix}$$

微结构单元 e



$$\begin{bmatrix} 72.5083 & 21.6506 & 0 \\ 21.6506 & 73.7095 & 0 \\ 0 & 0 & 14.9190 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 72.2680 & 21.3897 & 0 \\ 21.3897 & 73.0698 & 0 \\ 0 & 0 & 14.7026 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 72.6251 & 21.5106 & 0 \\ 21.5106 & 73.2228 & 0 \\ 0 & 0 & 14.8069 \end{bmatrix}$$

微结构单元 f

1) 比较表 2.4 中微结构单元 a、b、c 在三种相同网格离散下的等效弹性模量，发现微结构单元 a、b、c 的等效弹性模量是完全相等的，说明截取自同一周期性结构的微结构单元具有完全相同的宏观等效性能，与微结构单元具体的构型是无关的。

2) 比较表 2.4 中的微结构单元 a、d、e、f 在三种相同网格离散下计算得到的等效弹性模量，发现不同的微结构单元的构型对其等效弹性模量的计算存在显著的影响，如表 2.4 中微结构单元 a、d 在 160x160 的网格离散下，其  $D_{1111}$  的绝对差值达到了 7.8210。

3) 与微结构单元的具体构型不同对其等效弹性模量的影响相比，有限元离散的网格粗细对等效弹性模量的计算误差是足够小的，可以忽略不计。如表 2.4 中微结构单元 e，在 120x120 与 160x160 这两种网格密度下，其  $D_{1111}$  的绝对差值仅为 0.6248，与微结构构型不同引起的等效弹性模量的变化量 7.8210 相比是足够小的，足以忽略不计。

## 2.5 本章小结

本章基于均匀化理论推导了复合材料微结构的等效弹性系数矩阵的求解过程，为能利用成熟的拓扑优化技术，将基于均匀化理论的等效弹性系数矩阵表达成基于应变能等效的能量表达式，然后根据推导的公式在 Matlab 中编写了求解材料微结构等效弹性性能的程序，通过与相关权威文献的计算结果进行对比，验证了本章基于能量均匀化求解材料微结构等效弹性性能的正确性和有效性；数值算例表明，对于材料组分比相同但截取自不同周期性结构的不同微结构单元，其等效弹性性能差异明显，但不同的网格数目对等效弹性性能的影响足以忽略，这对后续求解微结构的等效性能时对

网格的划分具有一定的指导意义,对于截取自同一周期性结构的不同微结构单胞具有完全相同的等效弹性性能,这对后续优化得到的具体微结构构型的判定也具有一定的理论指导意义。

## 3 具有极限弹性性能的材料微结构拓扑优化

### 3.1 引言

高科技的发展对材料性能提出了越来越高的要求,如需要具有质量轻、比强度高、比模量大等极限特性的材料用于对结构有特殊要求的工程应用中,如在航空航天、高端武器装备、精密机械仪器等领域;或是具有特殊热弹性性能属性的材料如“零膨胀”材料用于高精度测量仪器中,以减少温度对测量精度的影响,如微纳米测量仪器<sup>[2]</sup>。

上述具有极限特性的材料宏观性能依赖于材料微观结构的性能,而材料微观结构的性能取决于微观结构的尺度、构型及材料组份比,通过第二章中的式(2.23)和表2.4也可看出材料微观结构的等效弹性性能与材料的组分和微结构具体的构型有关,这为后续开展材料微结构的优化设计指明了方向,即对具有特殊宏观性能的材料结构可以通过对其微观结构的优化设计来实现。

本章将在第二章的理论基础上,构建具有极端弹性性能的材料微结构的优化数学模型,以材料微结构的宏观等效弹性性能为优化目标,以材料的组份比为约束条件,对材料微结构进行拓扑优化设计。

### 3.2 材料微结构的拓扑优化数学模型及敏度分析

#### 3.2.1 材料微结构拓扑优化的数学模型

在结构拓扑优化中, SIMP 材料插值模型因为其概念相对简单、容易编程实现以及计算效率较高等特点,从而被广泛应用于结构拓扑优化中。本文对材料微结构的设计域进行有限元网格离散,然后对每个单元赋值一个表示单元相对密度的连续变量  $x_e$ , 即优化模型中的设计变量,且  $x_e \in [0,1]$ 。根据 SIMP 材料插值模型可知<sup>[61]</sup>, 离散单元的杨氏弹性模量  $E_e$  与该单元的相对密度  $x_e$  之间的函数关系可以用下式表示:

$$E_e = E(x_e) = E_{\min} + x_e^p (E_0 - E_{\min}) = E_{\min} + x_e^p \Delta E, x_e \in [0,1] \quad (3.1)$$

式中,  $E_e$  为单元  $e$  经密度插值后的弹性模量,  $x_e$  为单元  $e$  的相对密度;  $p$  为密度惩罚因子,对中间密度值进行惩罚,使单元的相对密度值向 0-1 两端聚集,以得到清晰的拓扑构型;  $E_0$  和  $E_{\min}$  分别为实体材料和空洞部分材料的弹性模量,为了优化过程中的数值求解稳定,取  $E_{\min} = E_0 / 10^9$ , 令  $\Delta E = (E_0 - E_{\min})$ 。

式(3.1)基于 SIMP 材料插值模型将连续的材料模型与离散的网格单元建立了一一对应的数学关系,则基于 SIMP 插值模型的结构总刚度矩阵  $K$  与离散单元的相对密度  $x_e$  之间的关系式为:

$$K = \sum_e K_e = \sum_{e=1}^N (E_{\min} + x_e^p \Delta E) K_e \quad (3.2)$$

式中,  $K$  是插值后结构的总刚度矩阵,  $K_e$  是单元刚度矩阵。

根据式 (3.1)、(3.2) 可知, 对 SIMP 材料插值模型属性进行控制的参数为单元的相对密度  $x_e$  和惩罚因子  $p$ 。图 3.1 所示为  $p$  取不同值时, 材料的杨氏弹性模量  $E_e$  随单元的相对密度  $x_e$  的变化趋势。

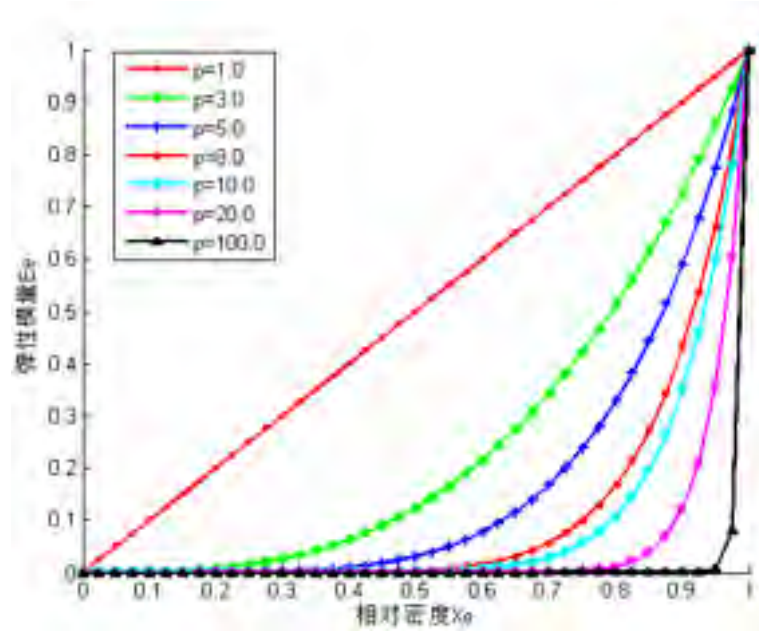


图 3.1 SIMP 密度惩罚模型

如图 3.1 所示的是惩罚因子  $p$  取 1、3、5、8、10、20、100 等不同值时弹性模量  $E_e$  随单元的相对密度  $x_e$  的变化曲线图。由图可知, 当惩罚因子  $p$  取不同值时, SIMP 插值模型对中间相对密度的惩罚效果明显不同, 惩罚因子  $p$  取值越大, 惩罚越厉害, 假设实体材料的弹性模量  $E_0 = 1$ , 如当  $p = 3$  时, 相对密度为 0.7 的单元经过惩罚因子  $p$  的惩罚后其弹性模量  $E_0 = 0.3430$ , 而当  $p = 8$  时, 该单元经惩罚因子  $p$  惩罚后的弹性模量  $E_0$  仅为 0.0576。为获得清晰的拓扑构型, 单从理论上讲, 惩罚因子  $p$  的取值越大, 对中间相对密度的惩罚效果便越好, 得到的拓扑构型就越清晰, 但过大的惩罚因子易导致棋盘格等数值不稳定性。因此, 在实际工程应用中, 惩罚因子  $p$  的取值一般为  $3 \leq p \leq 8$ 。当  $3 \leq p \leq 8$  时, 其 SIMP 插值模型符合 Hashin-Shtrikman 边界条件, 得到的最优拓扑构型也符合普遍的力学原理, 其最优解在理论上也是可行的。

本文基于 SIMP 材料插值模型, 以材料微结构的等效弹性系数矩阵中的某项或某几项分量的加权组合作为优化的具体目标, 解决具有极限弹性性能的材料微结构的最优拓扑构型设计。

对于二维平面应力问题, 材料微结构的等效弹性系数矩阵可表示成如下紧凑的矩阵形式:

$$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{26} \\ sym & & D_{66} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

则相关的工程常数可表示为：

$$D_x = D_{11} + \frac{2D_{12}D_{26}D_{16} - D_{22}D_{16}^2 - D_{66}D_{12}^2}{D_{22}D_{66} - D_{16}^2} \quad (3.4)$$

$$D_y = D_{22} + \frac{2D_{12}D_{26}D_{16} - D_{11}D_{26}^2 - D_{66}D_{12}^2}{D_{11}D_{66} - D_{16}^2} \quad (3.5)$$

$$G = D_{66} \quad (3.6)$$

对于正交各向异性材料，有  $D_{16} = D_{26} = 0$ ，则：

$$D_x = D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}} = D_{11} - \mu_x D_{12} \quad (3.7)$$

$$D_y = D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}} = D_{22} - \mu_y D_{12} \quad (3.8)$$

在式 (3.7)、(3.8) 中

$$\mu_x = \frac{D_{12}}{D_{22}} \quad \mu_y = \frac{D_{12}}{D_{11}} \quad (3.9)$$

当  $D_x = D_y$  时，则材料的体积模量可表示为：

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{4}(D_{11} + D_{12} + D_{21} + D_{22}) \\ &= \frac{1}{2}(D_{11} + D_{12}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

综上所述，材料微结构的宏观等效弹性性能实际上由两个或两个以上的参数决定，所以对具有极限弹性性能的材料微结构的拓扑优化问题实质上是一个多目标的优化问题。本文将采取将多个目标合成为一个单一目标的方式来进行优化，即引入权重系数  $\omega$  对多个目标进行归一化处理。

本文基于 **SIMP** 材料插值模型，以单元的相对密度为设计变量，以材料用量为约束，以材料微结构的等效弹性系数矩阵中主对角线上元素的某项或某几项的加权组合最大为优化目标，建立如下优化数学模型：

$$\begin{cases} find \mathbf{x}_i \ (i=1,2,...,N) \\ Max \ \varphi = \sum_{l=1}^3 \omega_l \mathbf{D}_l(x_i) \\ s.t. \quad V(x)/V_0 - f = 0 \\ \quad \quad 0 \leq x_i \leq 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

式中  $\omega_l$  为权重系数,  $\omega_l \in [0,1]$ ;  $D_{ll}$  为等效弹性系数矩阵  $\mathbf{D}^H$  中的元素(其中  $ll=11$ 、 $ll=22$ 、 $ll=33$ 、 $ll=12$  分别对应为  $D_{11}$ 、 $D_{22}$ 、 $D_{66}$ 、 $D_{12}$ );  $V(x)$  为优化后结构的体积;  $f$  为材料组份比;  $V_0$  为设计域体积。当  $\omega_l$  取不同值时, 则可以得到微结构的等效弹性系数矩阵中元素的不同加权组合的优化模型。如取  $w=[1 \ 0 \ 0 \ 0]$  时, 则优化目标为  $Max D_{11}^H$ , 即以结构水平方向抗拉性能最优为优化目标; 如取  $w=[0 \ 1 \ 0 \ 0]$  时, 则优化目标为  $Max D_{22}^H$ , 即以结构竖直方向抗拉性能最优为优化目标; 如取  $w=[0 \ 0 \ 0 \ 1]$  时, 则优化目标为  $Max D_{66}^H$ , 即以结构抗剪切性能最优为优化目标; 如取  $w=\left[\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0\right]$  时, 则优化目标为  $Max \frac{1}{2} D_{11}^H + \frac{1}{2} D_{22}^H$ , 即以结构双向抗拉模量之和最大为优化目标; 如取  $w=[1 \ 1 \ 2 \ 0]$  时, 则优化目标为  $Max D_{11}^H + D_{12}^H + D_{21}^H + D_{22}^H$ , 即以结构的体积模量最大为优化目标。

### 3.2.2 目标函数的灵敏度分析

微结构的有限元平衡方程为:

$$KU = F \quad (3.12)$$

式中,  $F$ 、 $U$  分别为微结构的结点力向量与结点位移向量。

如表 2.1 所示, 在相应边界条件下(上标  $n$  表示边界条件)的材料微结构相应的应变能为:

$$Q^{(n)} = \frac{1}{2} U^{(n)T} K U^{(n)} \quad (3.13)$$

由式(3.12)、(3.13)可得材料微结构的应变能对设计变量  $x_i$  的导数为

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q^{(n)}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} F^{(n)T} U^{(n)} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} U^{(n)T} K U^{(n)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ U^{(n)T} \frac{\partial K}{\partial x_i} U^{(n)} + 2 \frac{\partial U^{(n)T}}{\partial x_i} K U^{(n)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} U^{(n)T} \frac{\partial K}{\partial x_i} U^{(n)} = \frac{P}{x_i} \left( \frac{1}{2} U_i^{(n)T} K_i U_i^{(n)} \right) = \frac{P}{x_i} Q_i^{(n)}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U^{(n)T}}{\partial x_i} K U^{(n)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial U_{\Gamma}^{(n)T}}{\partial x_i} & \frac{\partial U_{\Omega}^{(n)T}}{\partial x_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\Gamma}^{(n)} \\ F_{\Omega}^{(n)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial U_{\Omega}^{(n)T}}{\partial x_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\Gamma}^{(n)} \\ 0 \end{bmatrix} = 0
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

式中  $U_{\Gamma}^{(n)}$  为微结构边界上的结点位移向量,  $U_{\Omega}^{(n)}$  为微结构内部结点位移向量,  $F_{\Gamma}^{(n)}$  为微结构边界上的结点外力向量,  $F_{\Omega}^{(n)}$  为微结构内部结点外力向量。

由式 (2.33)、(3.14) 可得

$$\frac{\partial D_{ll}^H}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_{11}^H}{\partial x_i} & \frac{\partial D_{12}^H}{\partial x_i} & 0 \\ & \frac{\partial D_{22}^H}{\partial x_i} & 0 \\ sym & & \frac{\partial D_{66}^H}{\partial x_i} \end{bmatrix} = \frac{P}{x_i} \begin{bmatrix} 2Q_i^{(1)} & Q_i^{(4)} - Q_i^{(2)} - Q_i^{(1)} & 0 \\ & 2Q_i^{(2)} & 0 \\ sym & & 2Q_i^{(3)} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

### 3.3 具有极限弹性性能微结构的优化实施步骤

按照上述灵敏度的求解方法, 结合有限元分析, 采用优化准则求解算法 (OC 方法) 即可对上述优化模型进行优化求解, 本文采用的收敛条件是连续两次设计变量的绝对差值  $|x^{(k+1)} - x^k| \leq 0.01$  时收敛, 优化流程如图 3.2 所示, 其具体步骤如下:

Step1: 定义微结构的设计域, 将材料平均离散到单元, 并定义初始结构布局;

Step2: 微结构的有限元静力分析;

Step3: 基于应变能等效的均匀化方法求解材料微结构的等效弹性系数矩阵;

Step4: 目标函数的计算及敏度分析;

Step5: 采用优化准则法对设计变量进行更新;

Step6: 根据预先设定的收敛条件判断目标函数是否收敛, 如果不收敛, 则重复步骤 2~步骤 5, 如果收敛, 则输出结果。



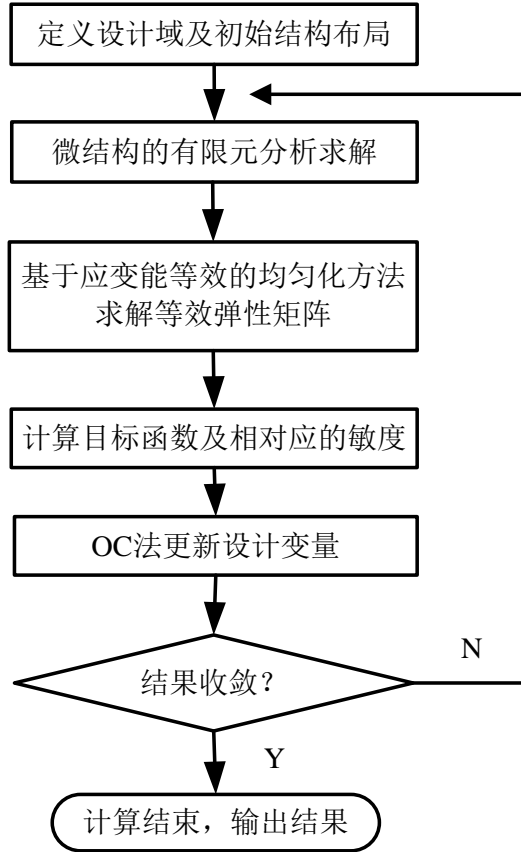


图 3.2 材料微结构的拓扑优化流程图

## 3.4 数值算例分析与讨论

根据前述构建的优化数学模型及分析可知，通过选取不同的加权系数  $w_i$  值可以得到不同系数加权的优化目标函数，本文分别取  $w=[1 \ 0 \ 0 \ 0]$ 、 $w=[0 \ 1 \ 0 \ 0]$ 、 $w=[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ 、 $w=\left[\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0\right]$  和  $w=[1 \ 1 \ 2 \ 0]$ ，相应的优化目标为  $Max D_{11}^H$ 、 $Max D_{22}^H$ 、 $Max D_{66}^H$ 、 $Max \frac{1}{2} D_{11}^H + \frac{1}{2} D_{22}^H$  和  $Max K$ 。选取实体材料的弹性模量  $E_0=1000$ ，泊松比  $\mu=0.3$ ，为了优化求解的数值稳定性，选取孔洞区域的材料属性为弹性模量  $E^{void}=E_0 \times 10^{-6}$ ，泊松比  $\mu=0.3$ 。

### 3.4.1 不同材料组分比和网格数目下不同优化目标的材料微结构拓扑优化





























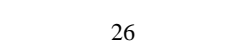




下面将比较上述五种不同的优化目标在不同的材料组分比以及不同的网格数目下优化得到的最优拓扑构型的差异。

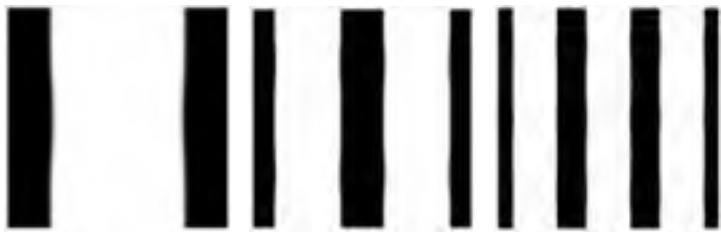



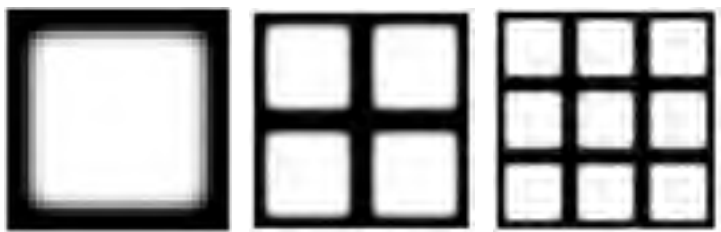
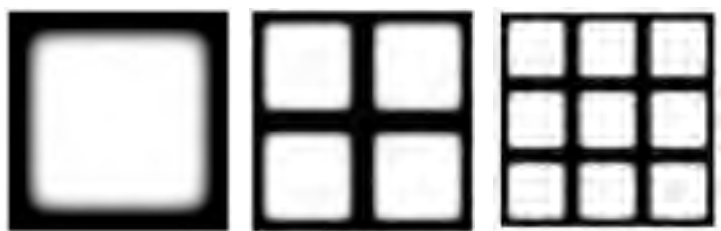
微结构的设计域离散为  $30 \times 30$ 、 $50 \times 50$ 、 $70 \times 70$  等三种网格数目，表 3.1 和表 3.2 为材料组分比分别为 0.4 和 0.6 时上述五种不同的优化目标在三种不同网格离散下的最优拓扑构型及相应的等效弹性矩阵（表 3.1 与表 3.2 中的最优拓扑构型图中黑色区域表示实体材料部分，白色区域表示孔洞部分（即无材料区域），灰色区域表示中间密度值的材料区域），图 3.1 表示的是表 3.1 中的五种不同优化目标在三种不同网格数

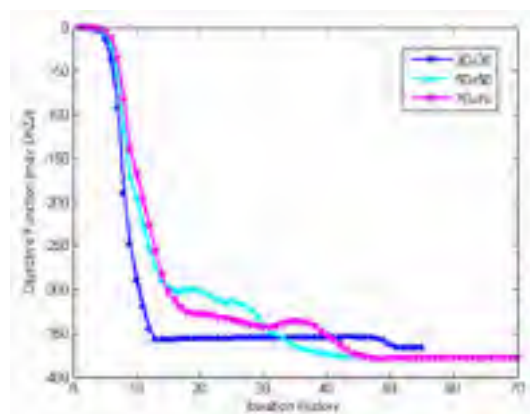
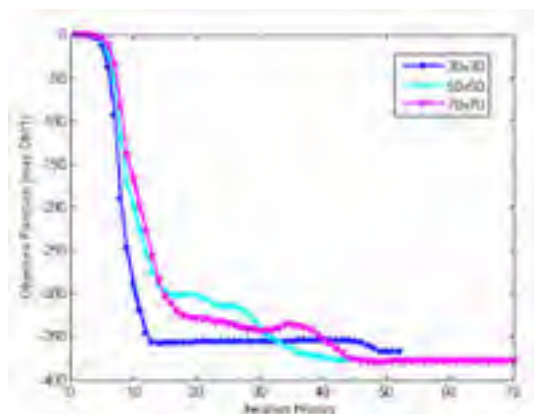
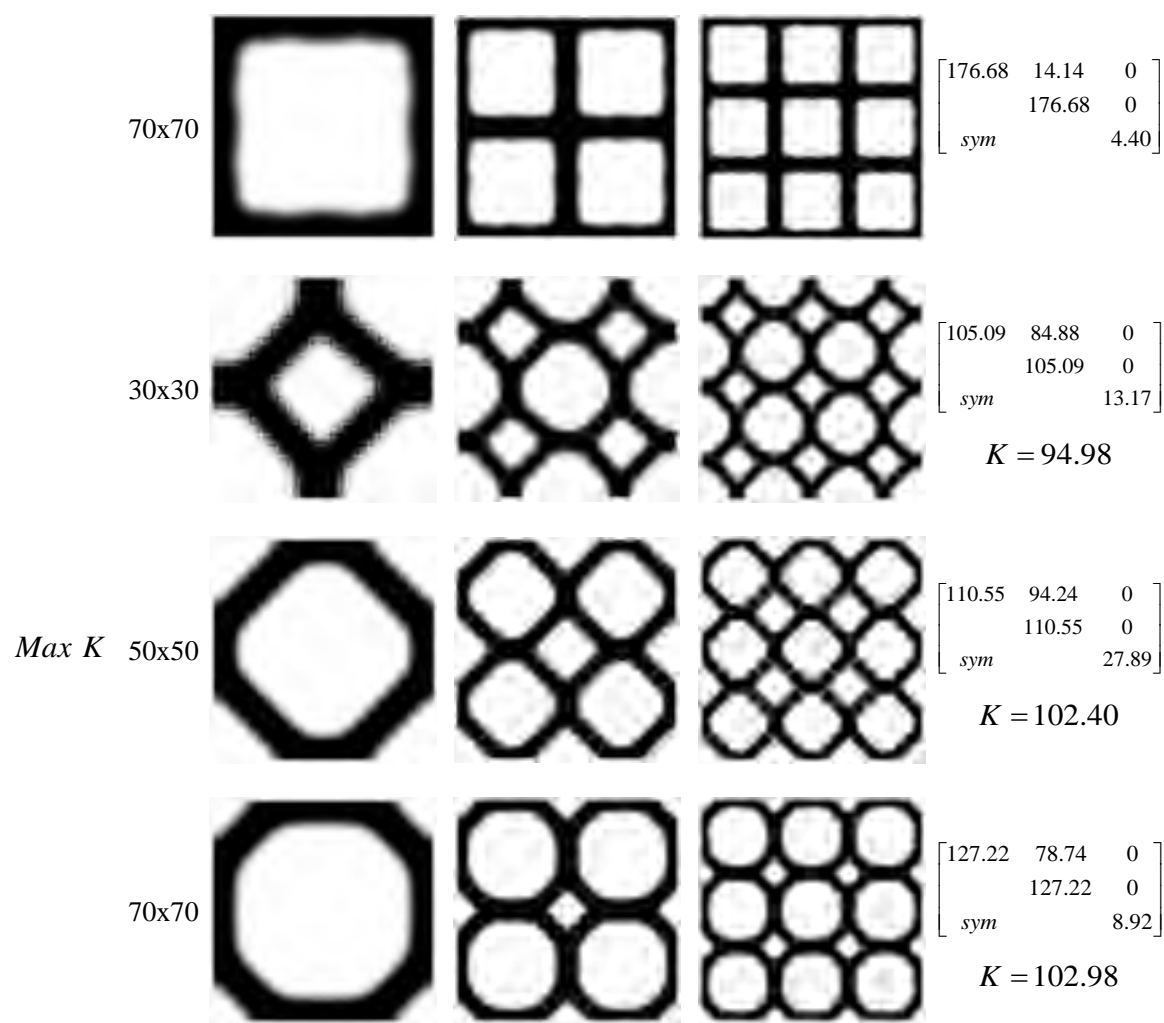


目离散下的优化目标值的收敛曲线图，相应地，图 3.2 表示的是表 3.2 中五种不同优化目标在三种不同网格数目离散下的优化目标值的收敛曲线图。

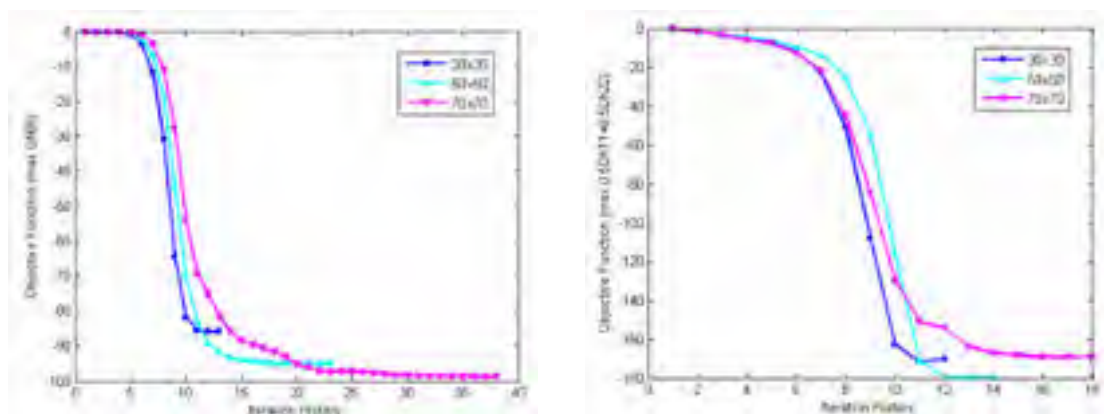
**表 3.1** 材料组分比为 0.4 时不同优化目标、网络的微结构构型和相应的等效弹性矩阵

优化目标	网格 数目	最优拓扑构型			等效弹性系数矩阵
		单胞 1x1	单胞 2x2	单胞 3x3	
$Max D_{11}^H$	30x30				$\begin{bmatrix} 366.89 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ sym & & 0 \end{bmatrix}$
	50x50				
	70x70				
$Max D_{22}^H$	30x30				$\begin{bmatrix} 375.98 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ sym & & 0 \end{bmatrix}$
	50x50				
	70x70				
$Max D_{11}^H$	30x30				$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 366.89 & 0 \\ sym & & 0 \end{bmatrix}$
	50x50				
	70x70				
$Max D_{22}^H$	30x30				$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 375.98 & 0 \\ sym & & 0 \end{bmatrix}$
	50x50				
	70x70				

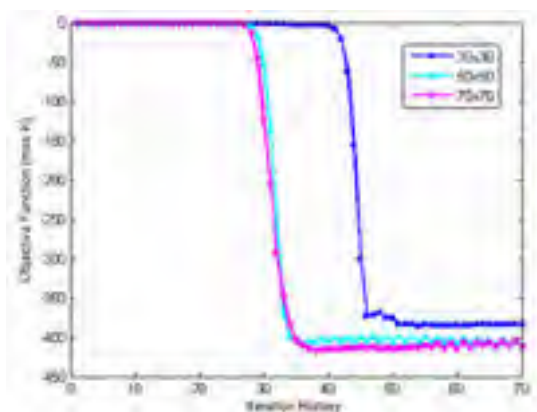
	70x70		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 378.07 & 0 \\ sym & & 0 \end{bmatrix}$
	30x30		$\begin{bmatrix} 107.40 & 97.57 & 0 \\ & 107.40 & 0 \\ sym & & 85.91 \end{bmatrix}$
$Max D_{66}^H$	50x50		$\begin{bmatrix} 119.20 & 106.12 & 0 \\ & 119.20 & 0 \\ sym & & 94.80 \end{bmatrix}$
	70x70		$\begin{bmatrix} 125.93 & 110.91 & 0 \\ & 125.93 & 0 \\ sym & & 98.71 \end{bmatrix}$
$Max$	30x30		$\begin{bmatrix} 170.38 & 12.70 & 0 \\ & 170.38 & 0 \\ sym & & 3.92 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2}D_{11}^H$ $+\frac{1}{2}D_{22}^H$	50x50		$\begin{bmatrix} 179.64 & 14.38 & 0 \\ & 179.64 & 0 \\ sym & & 4.08 \end{bmatrix}$



(a)  $Max D_{11}^H$  在不同网格数目下的收敛曲线图      (b)  $Max D_{22}^H$  在不同网格数目下的收敛曲线图



(c)  $Max D_{66}^H$  在不同网格数目下收敛曲线图 (d)  $Max \frac{1}{2} D_{11}^H + \frac{1}{2} D_{22}^H$  在不同网格数目下收敛曲线图














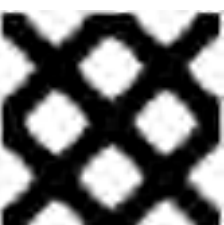









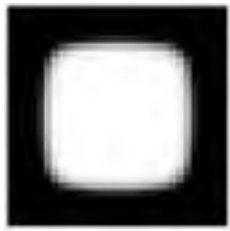



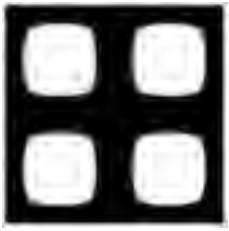


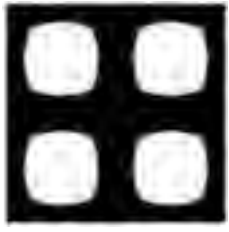
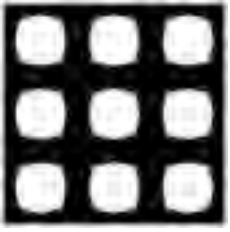

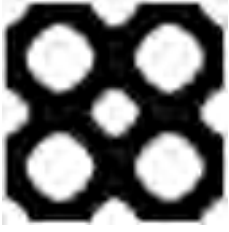


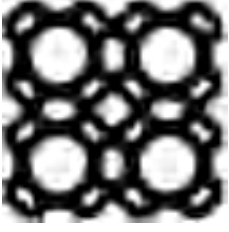
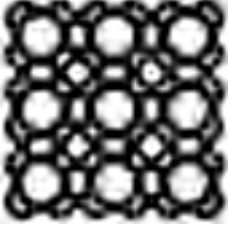
(e)  $Max K$  在不同网格数目下的收敛曲线图

图 3.1 材料组分为 0.4 时, 不同优化目标在不同网格数目下的目标函数收敛曲线图

表 3.2 材料组分为 0.6 时不同优化目标、网格的微结构构型和相应的等效弹性矩阵

优化目标	网格数目	最优拓扑构型			等效弹性系数矩阵
		单胞 1x1	单胞 2x2	单胞 3x3	
$Max D_{11}^H$	30x30				$\begin{bmatrix} 555.71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ sym & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	50x50				$\begin{bmatrix} 576.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ sym & 0 & 0 \end{bmatrix}$

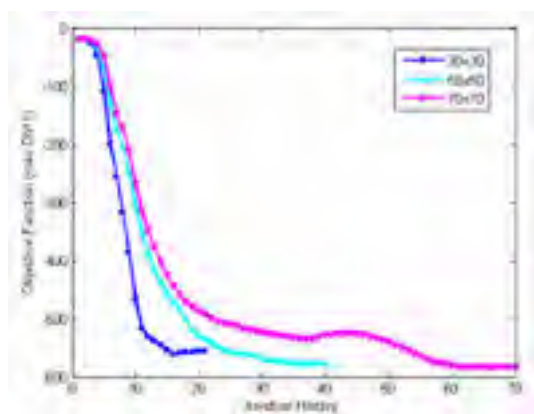
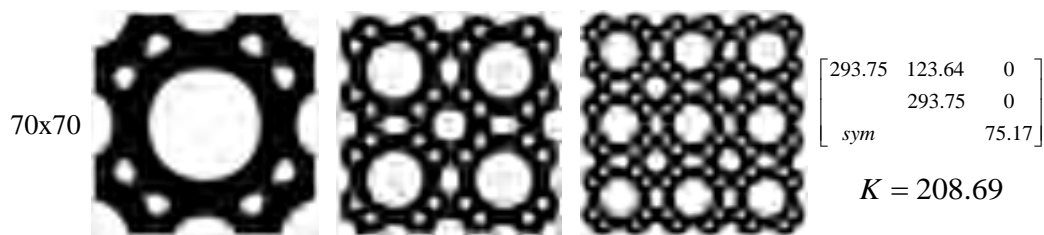
				$\begin{bmatrix} 583.33 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ sym & & 0 \end{bmatrix}$
				$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 555.71 & 0 \\ sym & & 0 \end{bmatrix}$
$Max D_{22}^H$				$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 576.06 & 0 \\ sym & & 0 \end{bmatrix}$
				$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 583.33 & 0 \\ sym & & 0 \end{bmatrix}$
				$\begin{bmatrix} 242.26 & 171.75 & 0 \\ & 242.26 & 0 \\ sym & & 152.28 \end{bmatrix}$
$Max D_{66}^H$				$\begin{bmatrix} 253.18 & 178.31 & 0 \\ & 253.18 & 0 \\ sym & & 158.38 \end{bmatrix}$

70x70				$\begin{bmatrix} 261.42 & 182.36 & 0 \\ & 261.42 & 0 \\ \text{sym} & & 162.46 \end{bmatrix}$
				$\begin{bmatrix} 352.62 & 54.01 & 0 \\ & 352.62 & 0 \\ \text{sym} & & 36.38 \end{bmatrix}$
				$\begin{bmatrix} 387.36 & 65.20 & 0 \\ & 387.36 & 0 \\ \text{sym} & & 45.45 \end{bmatrix}$
70x70				$\begin{bmatrix} 382.00 & 64.41 & 0 \\ & 382.00 & 0 \\ \text{sym} & & 46.74 \end{bmatrix}$
				$\begin{bmatrix} 250.54 & 155.95 & 0 \\ & 250.54 & 0 \\ \text{sym} & & 108.30 \end{bmatrix}$
				$\begin{bmatrix} 298.87 & 116.09 & 0 \\ & 298.87 & 0 \\ \text{sym} & & 57.51 \end{bmatrix}$

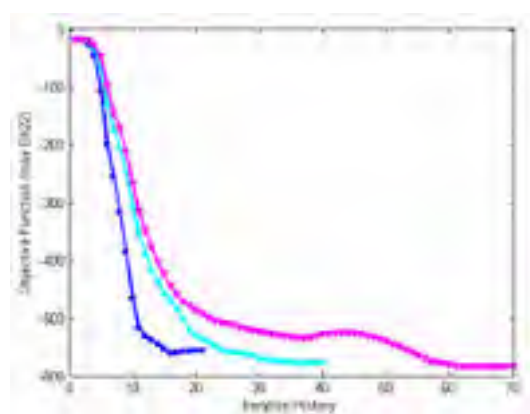
$K = 203.24$

$K = 207.48$

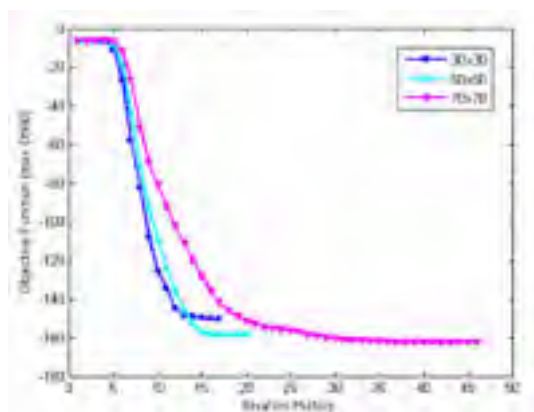




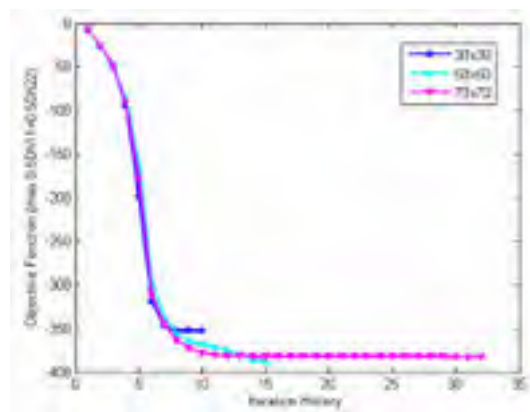
(a)  $Max D_{11}^H$  在不同网格数目下的收敛曲线图



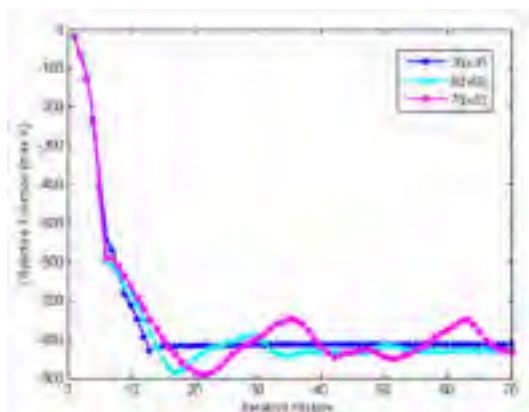
(b)  $Max D_{22}^H$  在不同网格数目下的收敛曲线图



(c)  $Max D_{66}^H$  在不同网格数目下收敛曲线图



(d)  $Max \frac{1}{2} D_{11}^H + \frac{1}{2} D_{22}^H$  在不同网格数目下收敛曲线图



(e)  $Max K$  在不同网格数目下的收敛曲线图

图 3.2 材料组分为 0.6 时, 不同优化目标在不同网格数目下的目标函数收敛曲线图

分析比较表 3.1 和表 3.2 中材料微结构的最优拓扑构型及相应的弹性系数矩阵，发现对于以  $Max D_{11}^H$ 、 $Max D_{22}^H$  或  $Max D_{66}^H$  为优化目标的单目标优化，以及以  $Max \frac{1}{2} D_{11}^H + \frac{1}{2} D_{22}^H$  为优化目标的较简单多目标优化时，在不同的网格粗细下优化得到的最优拓扑构型是几乎相同的，相应的等效弹性系数矩阵差别也很微小（如在组分比为 0.4 时，分别以  $Max D_{11}^H$ 、 $Max D_{22}^H$ 、 $Max D_{66}^H$ 、 $Max \frac{1}{2} D_{11}^H + \frac{1}{2} D_{22}^H$  为优化目标，在 30x30、50x50、70x70 这三种不同网格数目离散下，得到的优化目标的最大绝对差值分别为 11.18、11.18、12.8、9.26，其相应的变化率仅为 3.04%、3.04%、5.66%、5.4%，体积率为 0.6 时，在不同网格粗细下，其优化目标值的变化率最大的是  $Max D_{66}^H$ ，但也仅为 6.6%）；在相同的网格离散、不同的材料组分比下，以  $Max D_{11}^H$ 、 $Max D_{22}^H$ 、 $Max D_{66}^H$  或  $Max \frac{1}{2} D_{11}^H + \frac{1}{2} D_{22}^H$  为优化目标得到的最优拓扑构型也是几乎相同的，说明对于以  $Max D_{11}^H$ 、 $Max D_{22}^H$  或  $Max D_{66}^H$  为优化目标的单目标优化或者  $Max \frac{1}{2} D_{11}^H + \frac{1}{2} D_{22}^H$  为优化目标的较简单的多目标优化时，材料的组分比和网格粗细对材料微结构的最优拓扑构型的影响是极其微小的，所以在不同材料组分比和不同网格数目离散下均能得到类似的最优拓扑构型，在相同材料组分比、不同网格数目离散下优化得到的等效弹性系数矩阵对应元素的差别也较小。

但对于复杂的多目标优化，如表 3.1 和 3.2 中的  $Max K$ ，即  $Max \frac{D_{11}^H + 2 \times D_{12}^H + D_{22}^H}{4}$ ，

由于在优化过程中涉及到几个独立优化目标的相互权衡过程，所以在不同的网格数目和不同的材料组分比下，均会得到不同的最优拓扑构型（见表 3.1 与 3.2 中以  $Max K$  为优化目标时在不同材料组分比和不同网格数目离散下优化得到的最优拓扑构型的差异），相应的等效弹性系数矩阵也具有较大差异。但比较得到的最优目标值，发现其绝对差值均较小（如材料组分比为 0.4 时，在 30x30、50x50、70x70 这三种不同网格数目离散下，优化目标的最大绝对差值为 8.0，变化率为 7.7%，在材料组分比为 0.6 时，优化目标的最大绝对差值为 5.45，变化率仅为 2.6%）。

图 3.1 与图 3.2 为材料组分比分别为 0.4 和 0.6 时， $Max D_{11}^H$ 、 $Max D_{22}^H$ 、 $Max D_{66}^H$ 、 $Max \frac{1}{2} D_{11}^H + \frac{1}{2} D_{22}^H$ 、 $Max K$  等五种不同优化目标在不同网格数目离散下的目标值收敛曲线图。从图中可以看出不同优化目标在不同网格数目离散下的目标函数值收敛曲线非常相似，随着优化迭代的进行，优化目标值逐步稳定的减小，最后收敛的目标值均相差不大（如材料组分比为 0.4 时， $Max D_{11}^H$  在 30x30、50x50、70x70 三种不同网格



离散下分别经过 13、45、50 步迭代之后，目标函数值相应收敛于 366.89、375.98、378.07，其目标函数值的最大变化率仅为 3.04%，当材料组分比为 0.6 时， $Max D_{11}^H$  在三种不同网格下分别经过 21、40、60 步迭代之后，目标函数值相应的收敛于 555.71、576.06、583.33，其目标函数值的最大变化率仅为 4.97%，再次证明不同的网格数目对最终的优化目标值影响较小，在不同的网格数目下，目标函数的优化迭代过程较稳定。

从通过拓扑优化得到的最优拓扑构型来看（以体积率为 0.4，网格数目为 50x50 时为例）：

（1）当优化目标为  $Max D_{11}^H$ ，即以结构水平方向抗拉性能最优为优化目标时，材料呈水平纤维状分布，以增强微结构在水平方向上的承载能力，充分发挥其材料性能，其优化结果具体为  $D_{11}^H = 375.98$ ，与按照混合律模型求得的等效弹性模量  $D_x^H = 1000 \times 0.4 = 400$  相比，绝对差值为 24.02，误差率仅为 6%。

（2）当优化目标为  $Max D_{22}^H$ ，即以结构竖直方向抗拉性能最优为优化目标时，与（1）的结果类似，材料呈竖直纤维状分布，其优化结果与（1）相等，为  $D_{22}^H = 375.98$ 。

（3）当优化目标为  $Max D_{66}^H$ ，即以结构的抗剪切能力最优为优化目标时，最终得到材料沿 45°方向分布的微结构拓扑构型，其抗剪切强度性能为最优，充分发挥了材料潜力，其优化结果具体为  $D_{66}^H = 94.80$ 。

（4）当优化目标为  $Max \frac{1}{2} D_{11}^H + \frac{1}{2} D_{22}^H$ ，即以双向抗拉模量之和最优为优化目标时，材料按照优化目标的权重因子在水平方向和竖直方向上均匀分布，最大限度地同时承载水平方向和竖直方向上的载荷，其优化结果具体为  $D_{11}^H = 179.64$ 、 $D_{22}^H = 179.64$ 。

（5）当优化目标为  $Max K$ ，即以结构的体积模量最大为优化目标时，得到的材料微结构的最优拓扑构型如表 3.1 中所示，具有最优的抗压缩刚度，其具体的优化结果为  $K = 102.40$ 。


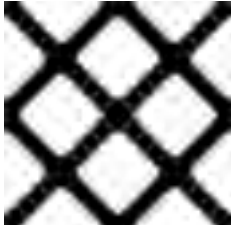
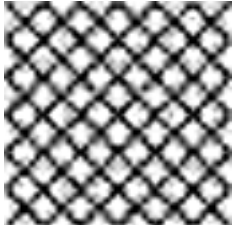


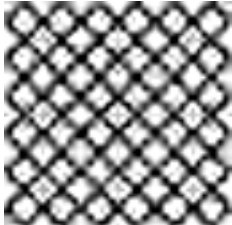
### 3.4.2 不同初始结构布局对材料微结构拓扑优化的影响


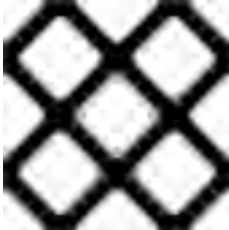
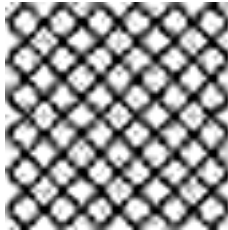
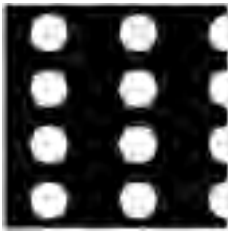

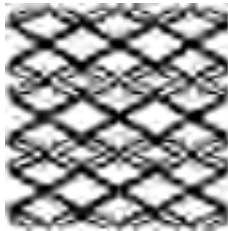
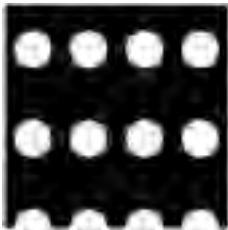



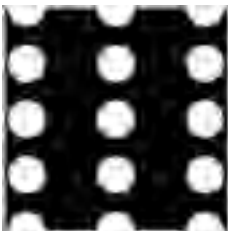

在传统的宏观结构拓扑优化设计过程中，设计域内的初始结构（即优化开始前的材料分布）对最终拓扑构型以及优化迭代过程的影响并不作考虑，一般的处理方式是将材料均匀分布，在宏观结构拓扑优化过程中就能得到较理想的优化结果，其迭代过程也较稳定。但在微观结构拓扑优化过程中，不再是在给定材料组分比下结构的整体柔度值最小或者应力约束下的材料用量最小等宏观优化问题，而是以微观结构单胞的某项具体材料属性最优为优化目标（如最大抗拉压刚度、最大抗剪切模量、最大体积模量、最优热传导性能、最大热膨胀系数等宏观材料固有属性），且不同构型的微结

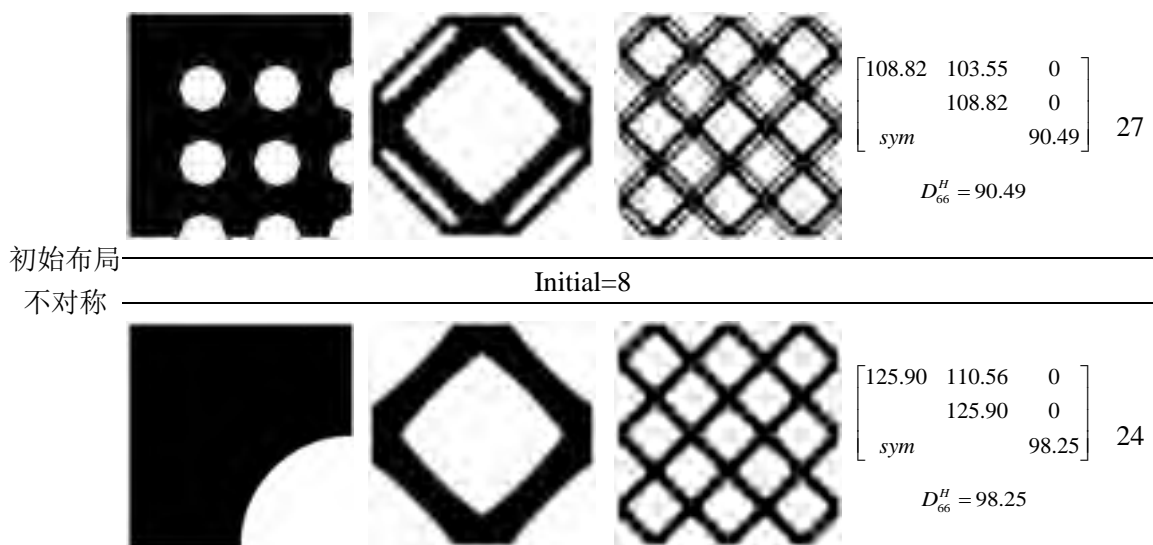
构单胞在宏观上也可以表现出相同或近似的材料属性，这就使得优化求解过程较宏观结构的优化求解复杂得多。同时在进行材料微结构的优化设计时，周期性边界条件的施加会导致敏度场是对称均匀的，这就使得设计变量的迭代更新变得更加难以实现<sup>[62]</sup>，特别是对于较复杂的多目标加权组合优化问题。因此，如果在材料微结构优化设计时若仍继续使用材料均匀分布的初始结构布局，则优化迭代过程易发生振荡，得不到优化解，或者目标函数值的迭代过程不稳定，收敛速度较慢，收敛结果具有偶然性。

基于此，本节将以具有代表性的最大剪切刚度（ $Max D_{66}^H$ ）和最大体积模量（ $Max K$ ）为优化目标，在不同初始结构布局下进行材料微结构的优化设计，以分析不同初始结构布局对微结构的最优拓扑构型的影响。选取实体材料的弹性模量  $E_0=1000$ ，泊松比  $\mu=0.3$ ，材料组分比为 0.4，微结构设计域离散为  $30 \times 30$  个单元。鉴于约束和载荷的对称性，选取整个微结构设计域的 1/4 建立有限元模型，进行优化求解。初始结构布局按照其几何对称性分为无初始结构布局（即材料均匀分布）、中心 1/4 对称、单轴对称、初始结构均匀化布局、初始结构布局不对称等五大类，其中有初始结构布局的四大类结构，在保证几何对称性的前提下均设计了两种类似的结构，以充分说明不同初始结构布局对材料微结构优化设计的影响。表 3.3 和表 3.4 分别为以最大剪切刚度、最大体积模量为优化目标时在不同初始结构布局下进行材料微结构优化设计所得到的最优拓扑构型、相应的等效弹性矩阵、目标函数值以及目标函数最终收敛的迭代步数。图 3.3 和图 3.4 分别为以最大剪切刚度、最大体积模量为优化目标时在不同初始结构布局下的目标函数值收敛曲线图。

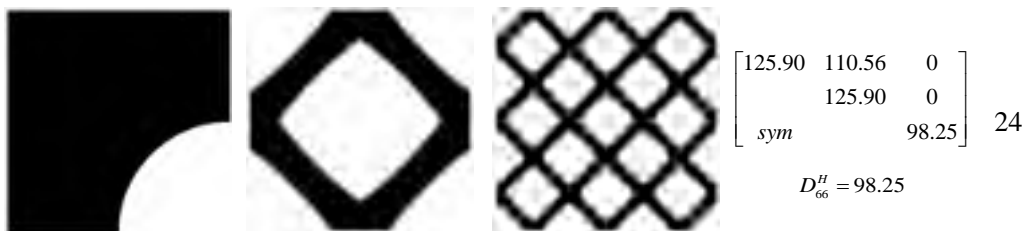
**表 3.3 不同初始结构布局对材料微结构优化的影响（以  $Max D_{66}^H$  为例）**

初始结构 布局的对 称性	初始结构布局	最优拓扑构型		等效弹性矩阵	迭代 步数
		单胞 1x1	单胞 3x3		
无初始结 构布局				$\begin{bmatrix} 107.40 & 97.57 & 0 \\ & 107.40 & 0 \\ sym & & 85.91 \end{bmatrix}$ $D_{66}^H = 85.91$	13
Initial=1					
中心 1/4 对称				$\begin{bmatrix} 107.41 & 97.58 & 0 \\ & 107.41 & 0 \\ sym & & 85.91 \end{bmatrix}$ $D_{66}^H = 85.91$	12

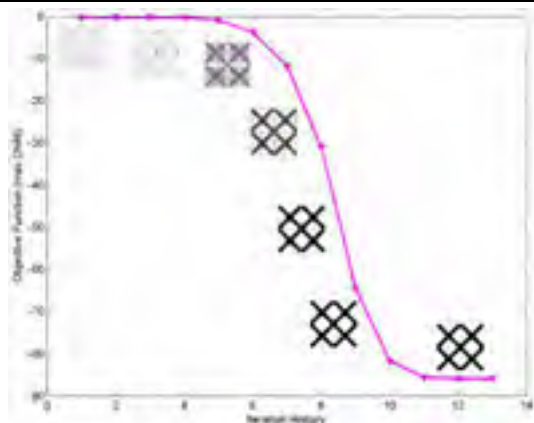
Initial=2			
			$\begin{bmatrix} 107.44 & 97.61 & 0 \\ & 107.44 & 0 \\ sym & & 85.91 \end{bmatrix} \quad 22$ $D_{66}^H = 85.91$
Initial=3			
			$\begin{bmatrix} 136.65 & 34.90 & 0 \\ & 12.61 & 0 \\ sym & & 61.89 \end{bmatrix} \quad 30$ $D_{66}^H = 61.89$
单轴对称	Initial=4		
			$\begin{bmatrix} 12.61 & 34.90 & 0 \\ & 136.65 & 0 \\ sym & & 61.89 \end{bmatrix} \quad 30$ $D_{66}^H = 61.89$
Initial=5			
初始结构 均匀化布局			$\begin{bmatrix} 222.19 & 53.23 & 0 \\ & 16.95 & 0 \\ sym & & 58.05 \end{bmatrix} \quad 51$ $D_{66}^H = 58.05$
	Initial=6		
			$\begin{bmatrix} 118.46 & 106.04 & 0 \\ & 118.46 & 0 \\ sym & & 94.16 \end{bmatrix} \quad 47$ $D_{66}^H = 94.16$
Initial=7			



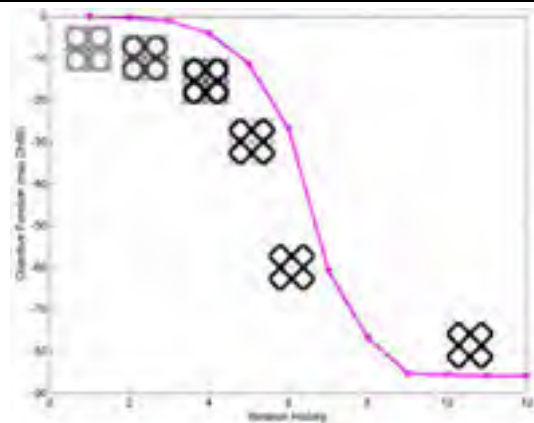
Initial=8



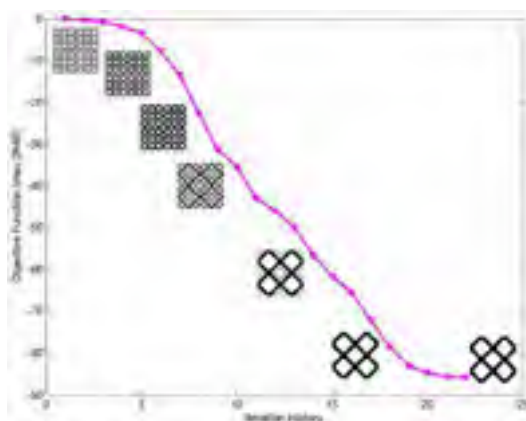
Initial=9



(a) initial=1 时优化目标迭代曲线



(b) initial=2 时优化目标迭代曲线



(c) initial=3 时优化目标迭代曲线

图 3.3 不同初始结构下微结构构型的迭代演变图



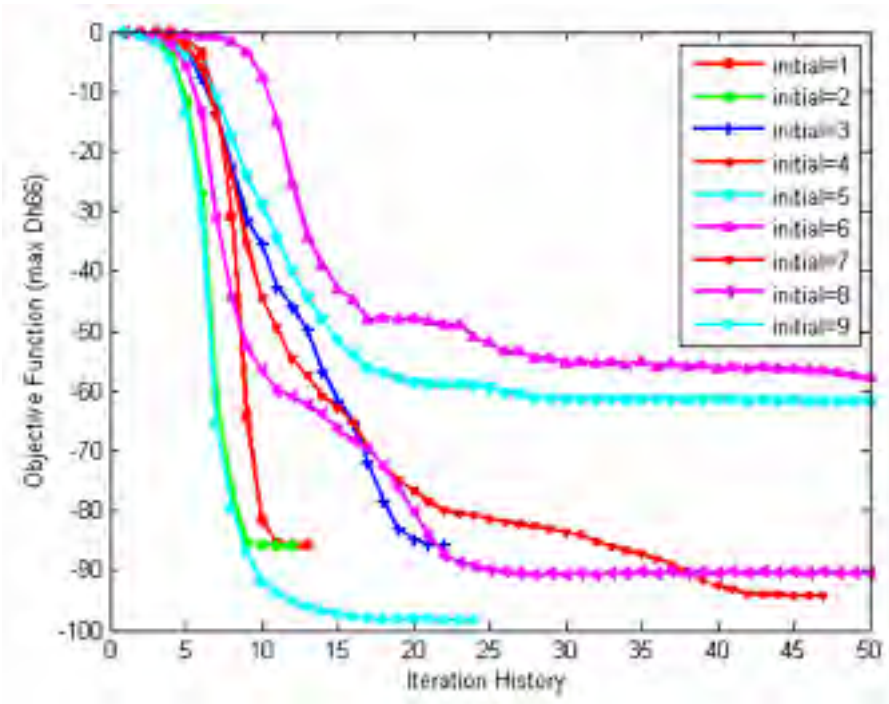

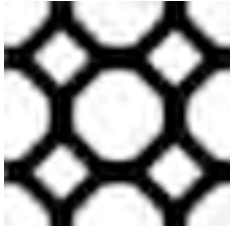



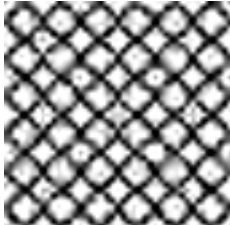


图 3.4 以  $Max D_{66}^H$  为优化目标时在不同初始结构布局下的目标函数值收敛曲线图

表 3.4 不同初始结构布局对材料微结构优化的影响（以  $Max K$  为例）

初始布局的对称性	结构初始布局	最优拓扑构型		等效弹性矩阵	迭代步数
		单胞 1x1	单胞 3x3		
无初始结构布局				$\begin{bmatrix} 105.69 & 85.87 & 0 \\ & 105.69 & 0 \\ sym & & 13.56 \end{bmatrix}$ $K^H = 95.78$	52
Initial=1					
中心 1/4 对称				$\begin{bmatrix} 100.95 & 92.36 & 0 \\ & 100.95 & 0 \\ sym & & 59.08 \end{bmatrix}$ $K^H = 96.65$	19
Initial=2					

单轴对称				$\begin{bmatrix} 180.21 & 15.37 & 0 \\ & 180.21 & 0 \\ sym & & 5.81 \end{bmatrix}$	39
				$K^H = 97.79$	
	Initial=3				
				$\begin{bmatrix} 148.57 & 59.51 & 0 \\ & 133.11 & 0 \\ sym & & 5.68 \end{bmatrix}$	55
				$K^H = 100.17$	
初始结构均匀化布局				Initial=4	
				$\begin{bmatrix} 133.11 & 59.51 & 0 \\ & 148.57 & 0 \\ sym & & 5.68 \end{bmatrix}$	55
				$K^H = 100.17$	
	Initial=5				
				$\begin{bmatrix} 140.80 & 77.35 & 0 \\ & 85.57 & 0 \\ sym & & 10.05 \end{bmatrix}$	70
				$K^H = 95.27$	
	Initial=6				
				$\begin{bmatrix} 151.49 & 75.12 & 0 \\ & 99.07 & 0 \\ sym & & 4.04 \end{bmatrix}$	56
				$K^H = 100.20$	
	Initial=7				

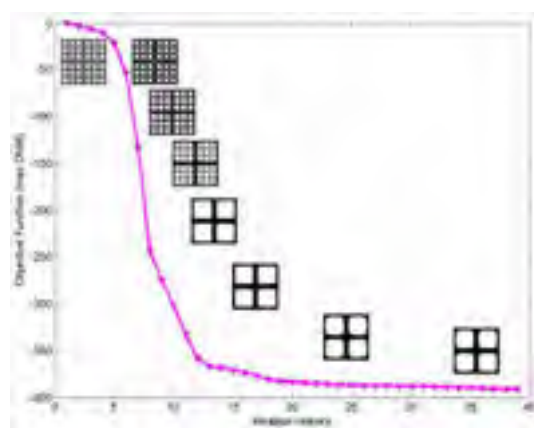
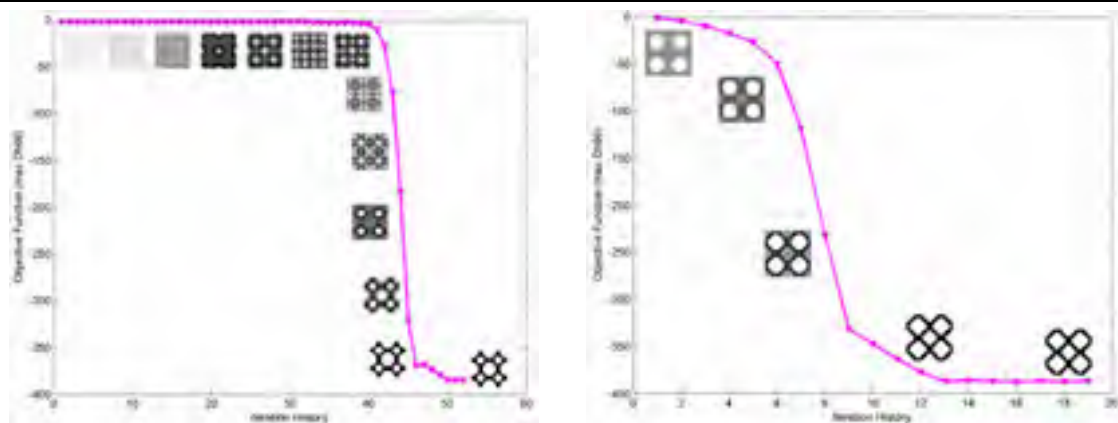
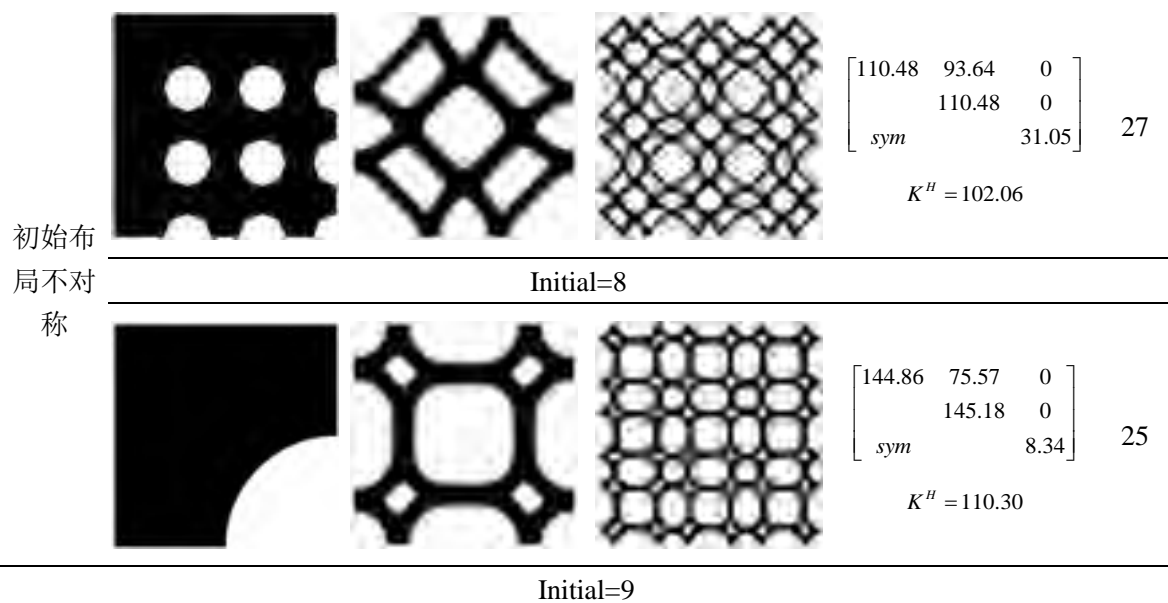


图 3.5 不同初始结构下微结构构型的迭代演变图

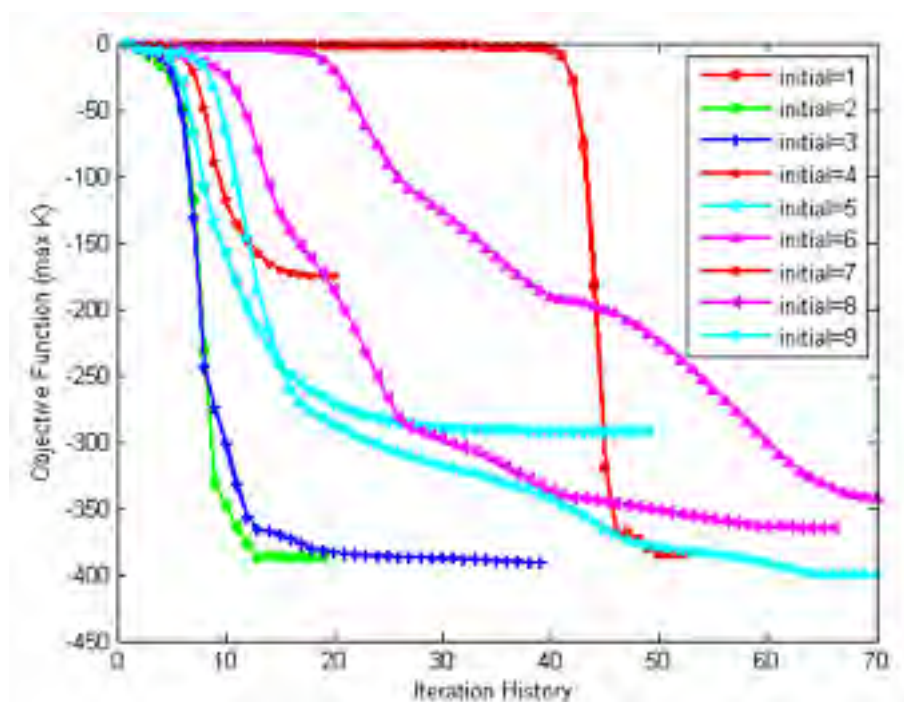


图 3.6 以  $\max K$  为优化目标时在不同初始结构布局下的目标函数值收敛曲线图

分析比较表 3.1 中材料微结构的最优拓扑构型以及相应的等效弹性系数矩阵发现，在不同的初始结构布局下，以剪切刚度最大为目标优化得到微结构的最优拓扑构型和等效弹性系数矩阵具有一定的差异。如在不初始布局 and 中心 1/4 对称的初始布局下，得到微结构单胞的最优拓扑构型具有明显的差异，但其等效弹性系数矩阵却几乎相同，将在这两种不同初始布局下得到的微结构单胞进行周期性重复之后发现其具有相同的宏观结构，说明这两种不同结构的微结构单胞是同一周期性结构的两种不同最小重复单元，所以其等效弹性系数矩阵几乎相等，这与本论文在第二章通过表 2.4 所得到的结论一致，因此在周期性重复的宏观结构层面上来说，这两种具有不同构型但其等效弹性系数矩阵相等的微结构，可以等效认为是同一种结构。如在单轴对称的初始布局与无初始布局下得到的微结构拓扑构型在细小结构上存在一定差异，但从最小的整体重复单胞来看，两种不同初始布局下所得到的微结构构型具有一定的相似度。比较初始结构均匀化布局与无初始结构布局所得结果发现，两种不同初始布局下所得微结构的最小重复单胞的构型相似，但对于  $\text{initial}=6$  这种过分均匀化分布的初始布局，所得的目标值较其他初始布局的偏小。初始结构布局不对称的两种初始布局，分别为中心 1/4 对称的两种初始布局的 1/4 结构，比较所得的微结构构型与等效弹性系数矩阵，发现与中心 1/4 对称初始布局所得结果几乎相同。

比较分析具有相同几何对称性的两种不同初始结构布局（如  $\text{initial}=2$  与  $\text{initial}=3$ 、 $\text{initial}=4$  与  $\text{initial}=5$ 、 $\text{initial}=6$  与  $\text{initial}=7$ 、 $\text{initial}=8$  与  $\text{initial}=9$ ）下的微结构拓扑构型



发现, 得到的微结构拓扑构型均相同或者具有高度的相似性, 特别如在  $\text{initial}=4$  与  $\text{initial}=5$  这两种具有不同单轴对称性的初始结构布局下, 所得微结构的最优拓扑构型与等效弹性矩阵亦具有相应的单轴对称性, 说明初始结构布局对微结构的最优拓扑构型具有一定指引性作用。

如图 3.3 所示, 在初始结构进行了预先布局之后, 后续的优化求解以初始布局为初始解, 这种初始解对后续的迭代过程起到重要的指引作用, 使目标函数值迅速收敛, 且优化迭代过程不会出现振荡现象。如图 3.4 为以  $\text{Max } D_{66}^H$  为优化目标时在不同初始结构布局下的目标函数值收敛曲线图。从图中不难看出, 在不同初始结构布局下, 目标函数值的迭代过程均较稳定, 在迭代开始时, 目标函数值均迅速减小, 其迭代收敛速度均较快, 除单轴对称的初始布局 ( $\text{initial}=4$ 、 $\text{initial}=5$ ) 与初始结构均匀化布局的 ( $\text{initial}=6$ ) 之外, 其他不同初始结构布局下的目标函数值均收敛于 90 左右。

综上所述可知, 对于以剪切刚度最大 (即,  $\text{Max } D_{66}^H$ ) 为优化目标的单目标优化, 在不同初始结构布局下得到微结构的最优拓扑构型具有一定的相似度, 其迭代过程也均较稳定, 收敛速度也较快。以上分析表明初始结构布局对于微结构的最优拓扑构型具有一定的指引性作用, 使其优化迭代过程更加稳定, 加快了收敛速度。

在这种以剪切刚度最大 (即,  $\text{Max } D_{66}^H$ ) 为优化目标的单目标优化, 初始结构布局对最终拓扑构型的指引性、优化迭代过程的稳定性以及收敛速度的影响均表现得不很明显。但在以体积模量最大 (即  $\text{Max } \frac{1}{4}(D_{11}^H + 2 \times D_{12}^H + D_{22}^H)$ ) 为优化目标的较复杂的多目标优化中, 不同初始结构布局对微结构最优拓扑的指引性、优化迭代过程的稳定性以及收敛速度的影响就表现得更加明显和重要。

如表 3.2 中所示, 除初始结构布局均匀化 ( $\text{initial}=6$ ) 与无初始结构布局下微结构的最小重复单胞构型具有一定的相似性之外 ( $\text{initial}=6$  的初始结构布局过于均匀化, 与无初始结构布局具有相似的均匀性, 所以得到的优化构型具有高度的相似性, 但比较其优化迭代的过程发现, 在  $\text{initial}=6$  的初始结构布局下, 优化目标值迭代稳定、收敛迅速, 而无初始布局时, 其迭代过程发生了振荡, 收敛具有偶然性), 在其他不同的初始结构布局下, 优化得到的最优拓扑构型与等效弹性矩阵均具有较大差异。但其优化目标值却相差不大, 除初始布局  $\text{initial}=9$  之外, 不同初始布局得到的优化目标最大绝对差值为 6.28, 变化率仅为 6.5%。

比较图 3.6 中在不同初始结构布局下优化目标的迭代曲线可以看出: 有初始结构布局的优化迭代过程稳定, 在迭代开始时, 其优化目标值均迅速减小, 收敛速度较快, 但观察无初始结构布局的优化目标值的迭代曲线发现, 在优化迭代的前 41 步, 优化目标值一直处于振荡过程中, 在迭代到第 43 步时, 目标值迅速减小, 在第 52 步便收敛, 其优化迭代过程非常不稳定, 收敛具有一定的偶然性。

综上所述可知，对于如以体积模量最大（ $Max K$ ）为优化目标的较复杂的多目标优化，初始结构布局对微结构的优化设计有着重要的影响，在不同的初始布局下得到的最优拓扑构型和等效弹性矩阵具有较大差异，但其最优目标值差别较小，说明初始结构布局对微结构的最优拓扑构型具有显著的指引性作用，使其优化迭代过程更加稳定，加快了收敛速度。

### 3.4.3 具有最优拓扑构型的微结构性能与 V-R、H-S 上下限的比较

针对复合材料的宏观等效弹性性能的上、下限已有了较多深入、成熟的研究，在表 3.1 与表 3.2 中，分别在材料组分比为 0.4 和 0.6 时，针对以水平方向抗拉压性能最优、竖直方向抗拉压性能最优、抗剪切性能最优、兼顾水平方向与竖直方向的双向抗拉压性能最优及微结构的体积模量最大等五种具有极限弹性性能的材料微结构的拓扑优化设计，基于此，本节将选择较具有代表性的以最大拉压刚度、最大剪切刚度和最大体积模量为优化目标，以不同的材料组分比为约束，进行材料微结构进行拓扑优化设计，并比较拓扑优化设计得到的最优材料性能与复合材料的宏观等效性能上、下限的关系。

对于多相复合材料，Voigt、Reuss 等学者利用最小势能原理与最小余能原理给出了复合材料的宏观等效性能的上、下限的表达式：

$$E^{VR+} = \sum_{i=0}^N f_i E_i \quad (3.17)$$

$$E^{VR-} = \left( \sum_{i=0}^N \frac{f_i}{E_i} \right)^{-1} \quad (3.18)$$

式中， $N$  为计算所用的复合材料相数， $f_i$  为第  $i$  相材料所占复合材料的组分比， $E_i$  为第  $i$  相材料的性能（即材料的杨氏弹性模量、剪切模量、体积模量），Voigt-Reuss 上限相当于将所有组份材料并联起来承受相同的应变所表现出来的材料属性，而 Voigt-Reuss 下限则相当于将所有组份材料串联起来承受相同的应力所表现出来的材料属性。由于 Voigt-Reuss 上、下限对复合材料等效宏观性能的界定过于宽松，所以在工程实际中的应用价值并不是很大。

由于 Voigt-Reuss 上、下限公式对复合材料宏观等效性能的上、下限界定不够精确，Hashin 与 Shtrikman 等学者采用变分法原理研究了两相复合材料的宏观等效性能的上、下限等边界问题，给出了两相复合材料的宏观等效剪切模量和宏观等效体积模量的上、下限边界值，其具体的数学表达式为：

$$G^{HS+} = G_1 + \frac{f_2}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{f_1(K_1 + 2G_1)}{2G_1(K_1 + G_1)}} \quad (3.18)$$

$$G^{HS-} = G_2 + \frac{f_1}{\frac{1}{G_1 - G_2} + \frac{f_2(K_2 + 2G_2)}{2G_2(K_2 + G_2)}} \quad (3.19)$$

$$K^{HS+} = K_1 + \frac{f_2}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{f_1}{K_1 + G_1}} \quad (3.20)$$

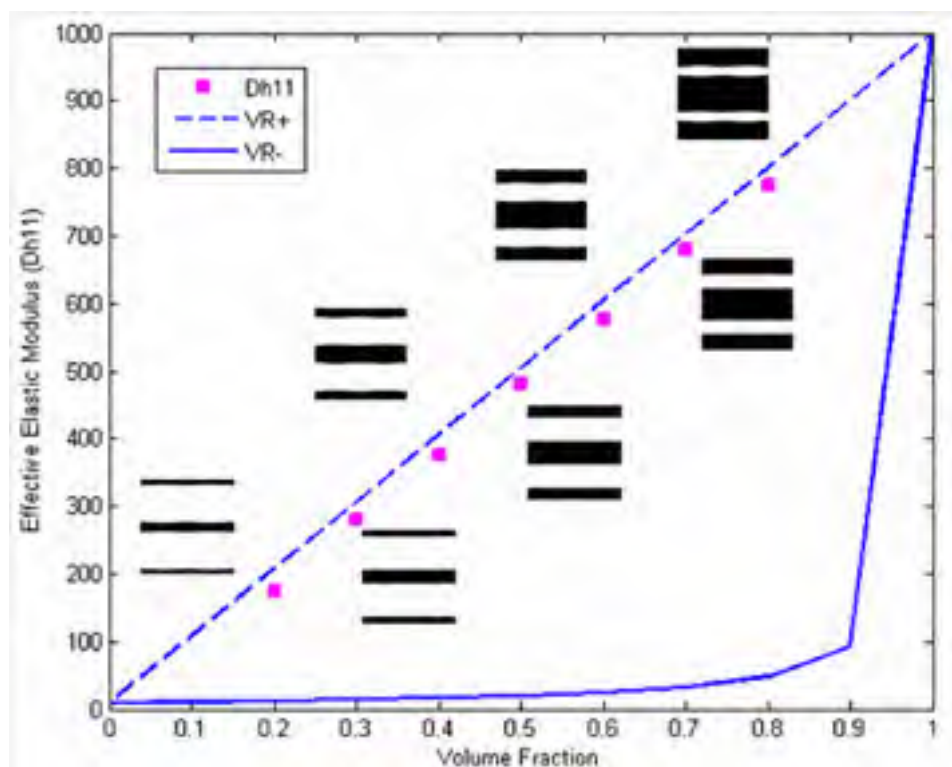
$$K^{HS-} = K_2 + \frac{f_1}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{f_2}{K_2 + G_2}} \quad (3.21)$$

式中， $G_1$ ， $K_1$ ， $f_1$  分别为强相材料的剪切模量、体积模量、组份比； $G_2$ ， $K_2$ ， $f_2$  分别为弱相材料的剪切模量、体积模量、组份比。Hashin-Shtrikman 对复合材料的宏观等效性能上、下限的预测精度较 Voigt-Reuss 上、下限有了显著的提高，因此是目前工程实际应用中较为适用的预测复合材料宏观等效性能的上、下限公式。

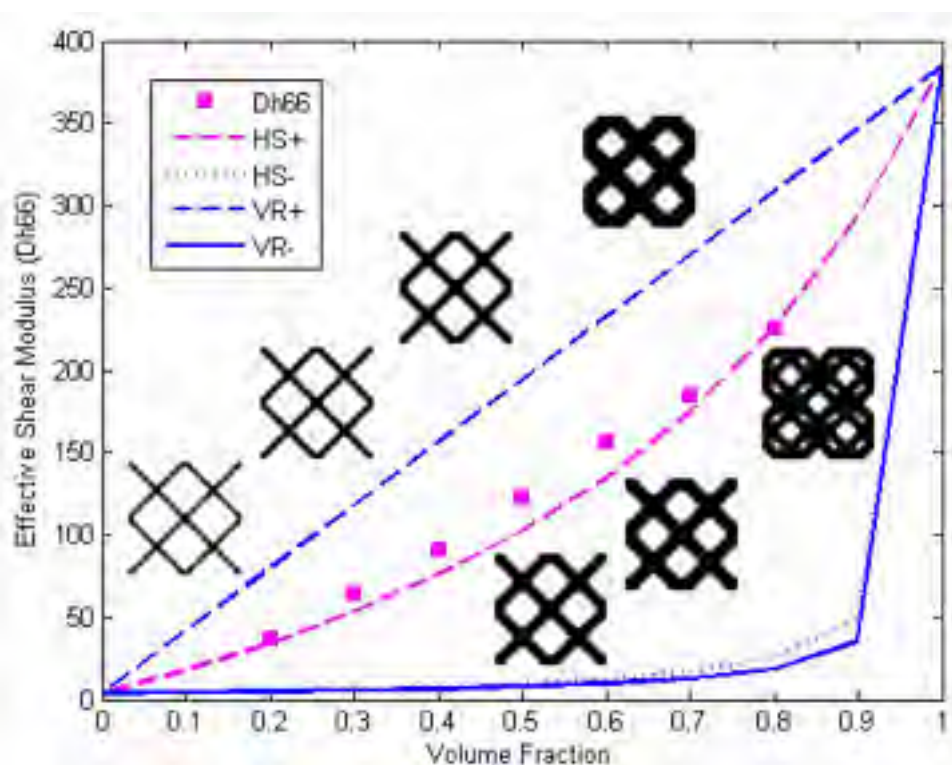
对于以最大拉压刚度（即， $Max D_{11}^H$ ）、最大剪切刚度（即， $Max D_{66}^H$ ）和最大体积模量（即， $Max K$ ）为优化目标进行的两相复合材料（即实体材料相与空材料相）微结构拓扑优化设计，微结构的设计域离散为50x50个单元，不同的材料组分比为材料用量约束。其中实体材料的弹性模量 $E_0 = 1000$ ，泊松比 $\mu = 0.3$ ，为了优化求解的数值稳定性，选取孔洞区域的材料属性为弹性模量 $E^{void} = E_0 \times 10^{-6}$ ，泊松比 $\mu = 0.3$ 。优化得到的最优拓扑构型随实体材料的组分比的变化曲线以及与复合材料的宏观等效性能的上、下限关系如图 3.5（a）、3.5（b）、3.5（c）所示。

由图 3.5（a）所示的微结构的等效单向拉压刚度随材料组分比的变化曲线可以看出：对于以等效单向拉压刚度最大（即， $Max D_{11}^H$ ）为优化目标的优化设计，得到的最优拓扑构型与纤维增强性复合材料构型具有相似的结构，在不同材料组分比下得到的优化目标值 $D_{11}^H$ 均接近于复合材料宏观等效性能的 Voigt-Reuss 上限的相应值，由此可见，Voigt-Reuss 上限可以对纤维增强性复合材料的等效弹性性能进行准确、有效的预测。同时这也与文献<sup>[63]</sup>中所得的结果相同，进一步验证了基于能量均匀化方法进行材料微结构拓扑优化设计的可靠性和有效性，同时亦表明本文所得结果的正确性。

由图 3.5（b）所示的微结构的等效剪切刚度随材料组分比的变化曲线可以看出：在不同材料组分比下，对于以剪切模量最大（即， $Max D_{66}^H$ ）为优化目标得到的最优

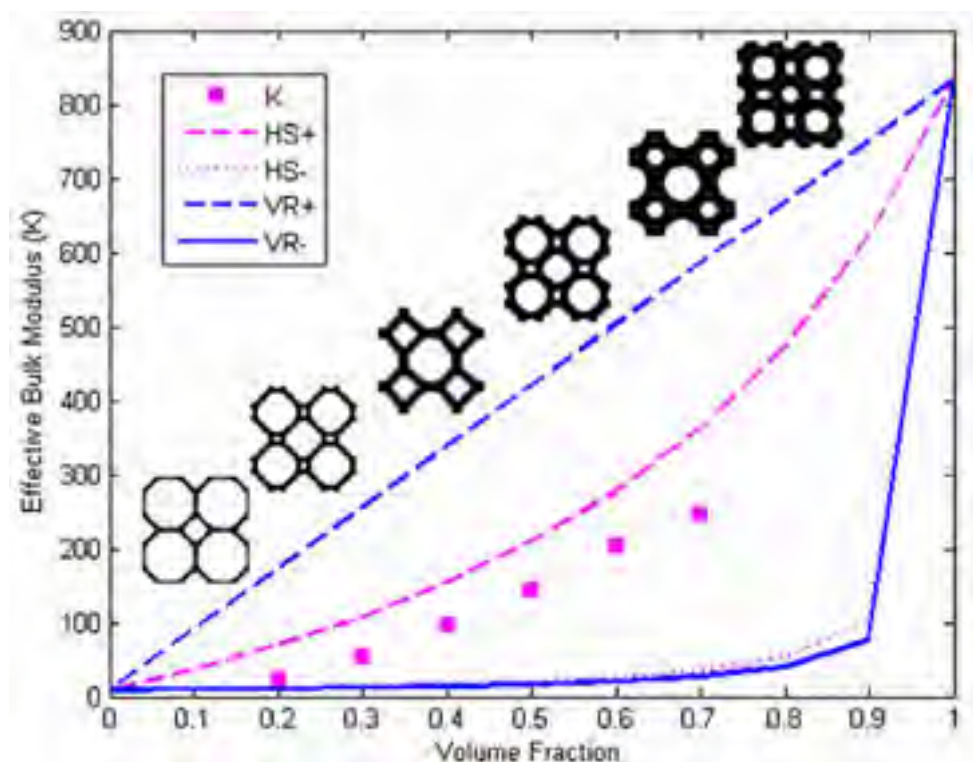


(a) 微结构的等效单向拉压刚度随材料组分比的变化曲线



(b) 微结构的等效剪切刚度随材料组分比的变化曲线





(c) 微结构的等效体积模量随材料组分比的变化曲线

图 3.5 具有最优拓扑构型微结构的等效弹性性能随材料组分比的变化曲线

拓扑构型的等效剪切模量值均超过了 Hashin-Shtrikman 上限的相应值，但均在 Voigt-Reuss 上限以下。由此可见，Hashin-Shtrikman 上限并不适合复合材料所有构型的等效弹性性能的预测，对于部分复杂的构型的等效弹性性能可能会超过 Hashin-Shtrikman 上限，说明不同构型微结构的极限等效剪切模量的复杂性以及 Hashin-Shtrikman 上、下限公式对复合材料等效宏观剪切模量预测的上限非最优性，这与文献<sup>[64]</sup>中对于 Hashin-Shtrikman 上、下限的研究所得结果是相同的。

由图 3.5 (c) 所示的微结构的等效体积模量随材料组分比的变化曲线可以看出：在不同材料组分比下，对于以体积模量最大（即， $Max K$ ）为优化目标得到的等效体积模量均较接近 Hashin-Shtrikman 上限的相应值，表明了 Hashin-Shtrikman 上限对复合材料等效体积模量预测的有效性<sup>[41]</sup>，同时也表明本文在不同材料组分比下对具有最大化体积模量的微结构进行优化设计所得结果的可靠性、正确性。

## 3.5 本章小结

本文基于 SIMP 材料插值模型，以材料微结构的等效弹性系数矩阵中的某项或某几项分量加权组合最大作为优化的具体目标，以材料组分比为约束，实现了具有最大水平抗拉压刚度、最大竖直抗拉压刚度、最大抗剪切刚度、最大水平竖直双向模量之和以及最大体积模量的材料微结构的最优拓扑构型设计。并分析了不同材料组份比和

网格数目对最优拓扑构型、等效弹性矩阵及优化目标值的具体影响,以及不同初始结构布局对材料微结构最优拓扑构型及优化迭代过程的指引性作用。将优化得到微结构的极限弹性性能与 Voigt-Reuss、Hashin-Shtrikman 的上下限进行比较,表明本文微结构优化设计方法的有效性以及所得结果的正确性。

## 4 具有极限负泊松比的材料微结构拓扑优化

### 4.1 引言

现代工程技术的发展对材料性能提出了越来越高的要求,不断需要具有特殊力学性能的新材料和结构。如具有极限负泊松比特性的微结构材料即属于这类新材料之列。负泊松比材料(即拉胀材料(Auxetic)),在承受横向拉伸时,在其纵向方向上会发生膨胀,相反,在承受横向挤压时则发生收缩,表现出与常规材料迥异的属性,如图1所示是一种典型的具有负泊松比特性的简单六角凹孔网状结构<sup>[66]</sup>。

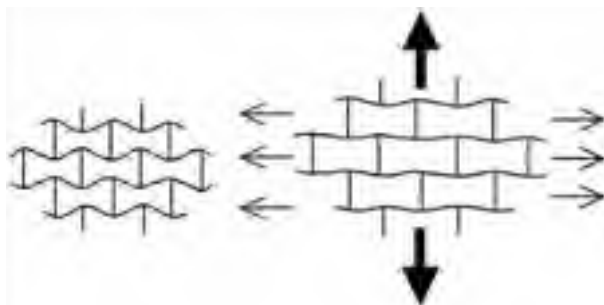


图1 具有负泊松比特性凹孔网状结构

负泊松比材料由于具备不同于常规材料的一些独特的性质,因此在很多方面拥有常规材料所不能比拟的绝对优势,尤其是在材料的机械性能方面有了较大幅度上的提高,如材料的抗断裂性能、材料的抗剪切模量以及材料的回弹韧性等<sup>[66]</sup>。三菱重工将具有负泊松比属性的材料引入到了子弹的结构设计中,使子弹整体表现出来的泊松比为0,降低了子弹通过弹道时产生的侧向膨胀,改善了子弹的运动<sup>[68]</sup>, Daeyoon<sup>[69]</sup>在几何非线性条件下利用拓扑优化方法实现了满足其动态变形机理的负泊松比材料的设计, Sicong<sup>[70]</sup>和 Giorgio<sup>[71]</sup>等基于各向同性材料实现了负泊松比材料设计, Miller<sup>[72]</sup>基于常规的制造技术将碳纤维与负泊松比材料相结合,提高了其负泊松比特性, Pasternak<sup>[73]</sup>在保证宏观结构较高剪切模量的情况下实现了在宏观结构层面具有负泊松比特性的结构设计, Zhen Luo<sup>[75]</sup>基于参数化水平集方法实现了具有负泊松比特性的材料微结构设计。负泊松比特性的材料的这种拉胀行为与经典的弹性理论并不相违背,根据热力学势能理论<sup>[68]</sup>,二维各向同性材料的泊松比取值范围为-1到1,因此材料具有负泊松比的特性在理论上亦是允许的。

负泊松比材料的提出为发展具有特殊力学性能的材料和结构指明了一个全新的方向和途径,本章以第二章的能量均匀化理论为基础,构建具有极限负泊松比特性的材料微结构优化数学模型,以材料组份比为约束条件,实现具有极限负泊松比特性的微结构优化设计。

## 4.2 具有极限负泊松比的微结构拓扑优化数学模型及敏度分析

### 4.2.1 具有极限负泊松比的微结构拓扑优化数学模型

根据第三章式 (3.9) 可知：

$$\mu_x = \frac{D_{12}}{D_{22}} \quad \mu_y = \frac{D_{12}}{D_{11}} \quad (4.1)$$

基于各向同性材料的微结构，其等效弹性系数矩阵中  $D_{11}^H = D_{22}^H$ ，则对于各向同性材料微结构的等效泊松比可简化表示为：

$$\mu = \frac{D_{12}^H}{D_{11}^H} \quad (4.2)$$

本文若直接以  $\mu = D_{12}^H / D_{11}^H = -1$  为优化目标，采用拓扑优化技术使目标函数无限接近-1，以实现具有极限负泊松比属性的材料微结构优化，是极其困难的。对于以  $\mu = D_{12}^H / D_{11}^H = -1$  这种高度非线性的目标为优化目标的数学模型，基于一般的优化求解算法是很难实现的，必须额外添加约束或者改进优化求解算法。基于此，本文采取多目标加权优化的方式，基于一般的 OC 优化准则法在不添加额外约束的情况下实现具有极限负泊松比的材料微结构拓扑优化设计，即以材料组份比为约束条件，以优化求解得到的微结构等效弹性矩阵与预先设定的  $\mu = -1$  的目标弹性矩阵相应元素的平方差的加权组合最小为优化目标，以获得满足要求的微结构构型。这种处理方式下的优化模型与第三章中具有极限弹性性能的微结构优化模型高度相似，方便了优化求解及后续相应的敏度分析。

由式 (4.2) 可知，要获得具有极限负泊松比（即， $\mu = D_{12}^H / D_{11}^H = -1$ ）的微结构，等价于求解给定性能  $D_{11}^H$ （ $D_{22}^H = D_{11}^H$ ）、 $D_{12}^H$  的微结构，即要获得给定的等效弹性系数矩阵：

$$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} D_{11}^H & D_{12}^H & 0 \\ & D_{22}^H & 0 \\ sym & & D_{66}^H \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{H*} = \begin{bmatrix} D_{11}^{H*} & D_{12}^{H*} & 0 \\ & D_{22}^{H*} & 0 \\ sym & & D_{66}^{H*} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

具体的优化数学模型如下式所示：

$$\begin{cases} find \quad \mathbf{x}_i \quad (i=1,2,\dots,N) \\ Min \quad \varphi = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \eta_l (\mathbf{D}_{ll}^H(x_i) - \mathbf{D}_{ll}^{H*})^2 \\ s.t. \quad V(x)/V_0 - f = 0 \\ \quad \quad 0 \leq \mathbf{x}_i \leq 1 \end{cases} \quad (4.4)$$

式中  $\eta_l$  为等效弹性系数矩阵中相应元素的权重系数，本文取  $\eta_l = [0.01 \quad 0.01 \quad 1]$ ；



$D_{ll}^H$  为等效弹性系数矩阵  $D^H$  中的元素，相应地， $D_{ll}^{H*}$  为预先给定的等效弹性系数矩阵  $D^{H*}$  的主分量(其中  $ll=11$ 、 $ll=22$ 、 $ll=12$ 、 $ll=33$  分别对应为  $D_{11}^H$ 、 $D_{22}^H$ 、 $D_{12}^H$ 、 $D_{66}^H$  或  $D_{11}^{H*}$ 、 $D_{22}^{H*}$ 、 $D_{12}^{H*}$ 、 $D_{66}^{H*}$ )； $V(\mathbf{p})$  为优化后结构的体积； $f$  为材料组份比； $V_0$  为设计域体积。

## 4.2.1 目标函数的灵敏度分析

目标函数的灵敏度为目标函数对设计变量的导数，由第三章的式 (3.16) 可知：

$$\frac{\partial \mathbf{D}_{11}^H}{\partial x_i} = \frac{2P}{x_i} Q_i^{(1)} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}_{22}^H}{\partial x_i} = \frac{2P}{x_i} Q_i^{(2)} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}_{12}^H}{\partial x_i} = \frac{P}{x_i} (Q_i^{(4)} - Q_i^{(2)} - Q_i^{(1)}) \quad (4.7)$$

则对于极限负泊松比的材料微结构的敏度分析公式为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \sum_{l=1}^3 \eta_l (\mathbf{D}_{ll}^H(x_i) - \mathbf{D}_{ll}^{H*}) \frac{\partial \mathbf{D}_{ll}^H}{\partial x_i} \\ &= \eta_1 (\mathbf{D}_{11}^H(x_i) - \mathbf{D}_{11}^{H*}) \frac{2P}{x_i} Q_i^{(1)} + \\ &\quad \eta_2 (\mathbf{D}_{22}^H(x_i) - \mathbf{D}_{22}^{H*}) \frac{2P}{x_i} Q_i^{(2)} + \\ &\quad \eta_3 (\mathbf{D}_{12}^H(x_i) - \mathbf{D}_{12}^{H*}) \frac{P}{x_i} (Q_i^{(4)} - Q_i^{(2)} - Q_i^{(1)}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

## 4.3 具有极限负泊松比材料微结构的优化实施步骤

按照上述建立的优化数学模型，结合相应的灵敏度分析，采用优化准则法（OC 方法）即可对上述优化模型进行优化求解，本文采用的收敛条件是连续两次设计变量的绝对差值  $|x^{(k+1)} - x^k| \leq 0.01$  时收敛，优化流程如图 4.2 所示，其具体步骤如下：

Step1：定义材料微结构的设计域，将材料平均离散到单元，定义初始结构布局；

Step2：设定目标等效弹性矩阵；

Step3：材料微结构的有限元静力分析；

Step4：基于应变能等效的均匀化方法求解材料微结构的等效弹性系数矩阵；

Step5：目标函数的计算及敏度分析；

Step6：采用优化准则法对设计变量进行更新；

Step7：根据收敛条件判断目标函数是否收敛，如果不收敛，则重复步骤 3~步骤 6，如果收敛，则输出结果。

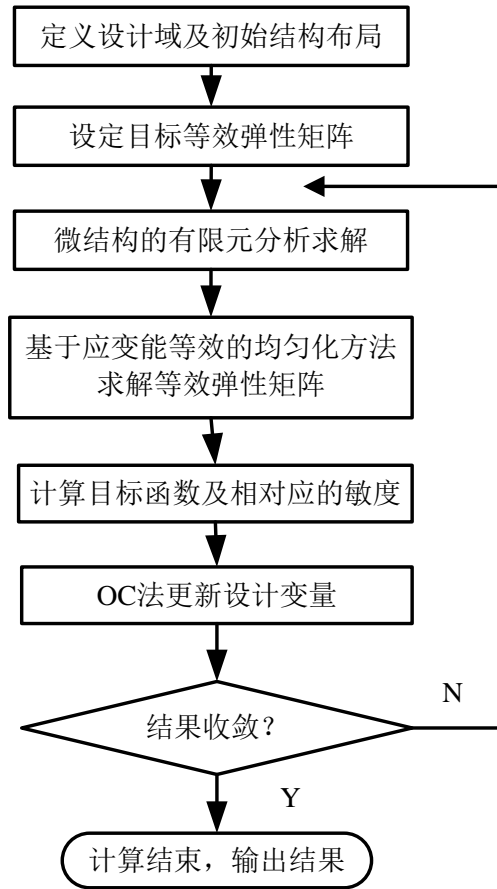


图 4.2 极限负泊松比材料微结构的拓扑优化流程图

## 4.4 数值算例分析与讨论

根据前述建立的优化数学模型及相应的灵敏度分析可知，通过预先设定目标弹性矩阵，采用一般的 OC 优化准则法进行优化求解，使优化求解得到的等效弹性系数矩阵值不断逼近目标弹性矩阵值，以此可以得到具有极限负泊松比（即  $\mu = D_{12}^H / D_{11}^H = -1$ ）微结构的最优拓扑构型。基于此，本节将在不同材料组分比和网格数目以及不同初始结构布局下对微结构进行优化设计，使优化得到的最优拓扑构型具有极限负泊松比的特性，并分析讨论不同材料组分比、不同网格数目以及不同的初始结构对具有极限负泊松比微结构的最优拓扑构型及等效泊松比值的影响。

### 4.4.1 不同材料组分比和网格数目下具有极限负泊松比的微结构拓扑优化


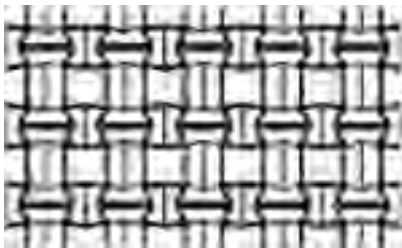

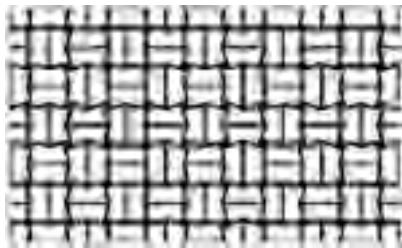
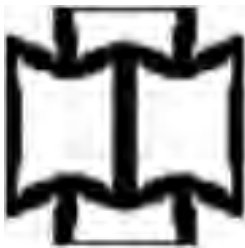
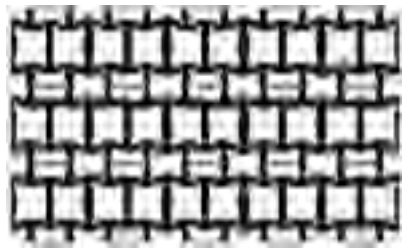



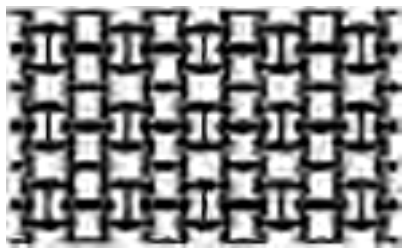
下面将比较在不同材料组分比和网格数目下具有极限负泊松比微结构的最优拓扑构型的差异。微结构的材料组分比分别为 0.3、0.4、0.5、0.6 等四种，微结构的设计域离散为 30x30、60x60 个网格单元。选取实体材料的弹性模量  $E_0 = 9.1$ ，泊松比为  $\mu = 0.3$ ，为了优化求解的数值稳定性，选取孔洞区域的材料属性为弹性模量  $E^{void} = E_0 \times 10^{-6}$ ，泊松比  $\mu = 0.3$ 。

给定泊松比  $\mu = -1$  的目标弹性系数矩阵为：

$$\mathbf{D}^{H*} = \begin{bmatrix} D_{11}^{H*} & D_{12}^{H*} & 0 \\ D_{12}^{H*} & D_{22}^{H*} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

表 4.1 和表 4.2 分别为无初始结构布局和有初始结构布局时微结构的最优拓扑构型及相应的等效弹性系数矩阵，相应地，图 4.1 和图 4.2 分别为表 4.1 和表 4.2 中不同材料组分比和不同网格数目下的目标函数迭代曲线图。

**表 4.1 无初始结构布局时具有极限负泊松比的微结构构型和相应的等效弹性矩阵**

材料组 分比	网格 数目	最优拓扑构型		等效弹性系数矩阵 及等效泊松比值
		单胞 1x1	单胞 3x5	
0.3	30x30			$\begin{bmatrix} 0.4086 & -0.2135 & 0 \\ & 0.5252 & 0 \\ \text{sym} & & 0.0058 \end{bmatrix}$ $\mu = -0.5224$
	60x60			$\begin{bmatrix} 0.4017 & -0.2043 & 0 \\ & 0.3949 & 0 \\ \text{sym} & & 0.0036 \end{bmatrix}$ $\mu = -0.5086$
0.4	30x30			$\begin{bmatrix} 0.7642 & -0.3997 & 0 \\ & 0.5524 & 0 \\ \text{sym} & & 0.0239 \end{bmatrix}$ $\mu = -0.5230$
	60x60			$\begin{bmatrix} 0.7382 & -0.3803 & 0 \\ & 0.5092 & 0 \\ \text{sym} & & 0.0166 \end{bmatrix}$ $\mu = -0.5152$
0.5	30x30			$\begin{bmatrix} 0.6957 & -0.4808 & 0 \\ & 0.8666 & 0 \\ \text{sym} & & 0.0259 \end{bmatrix}$ $\mu = -0.6911$

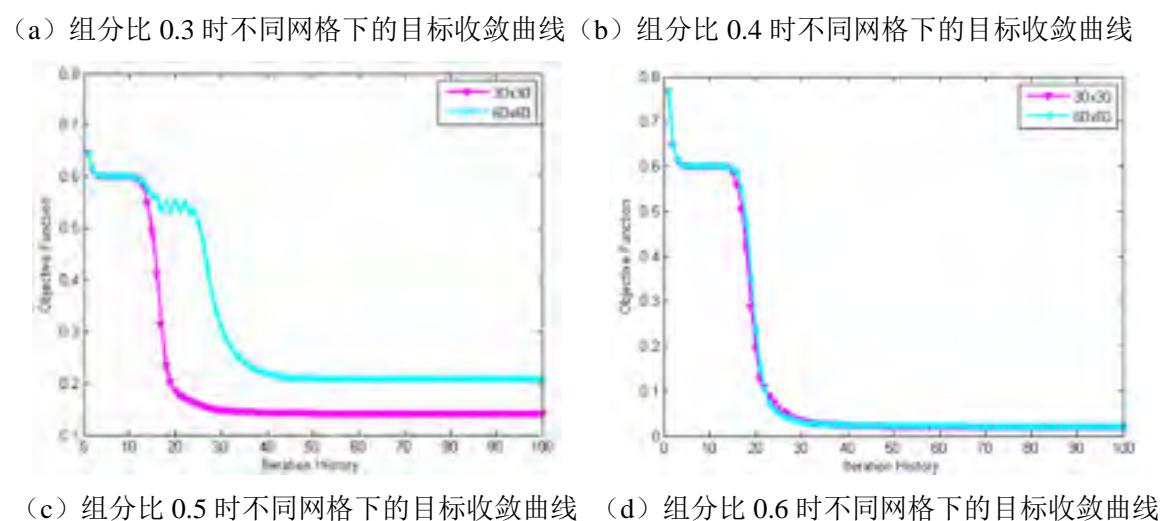
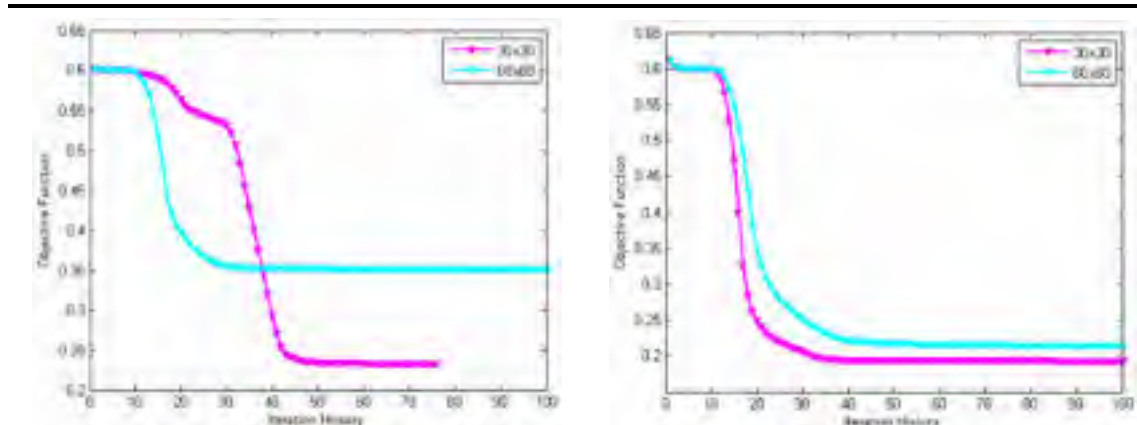
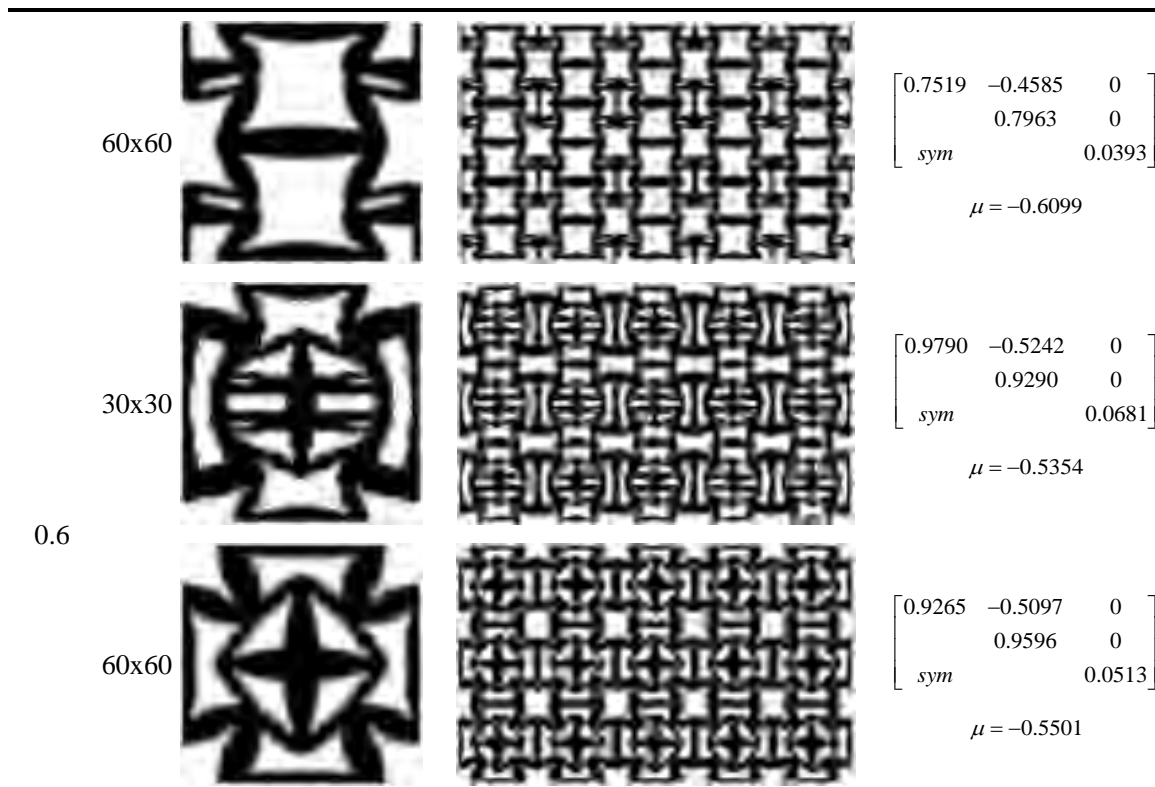
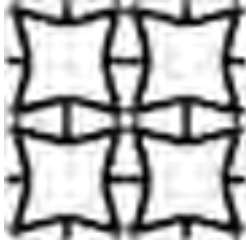
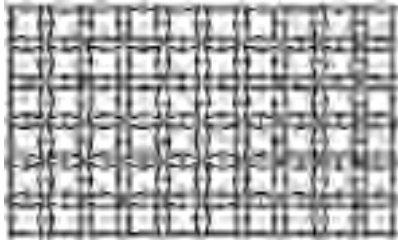
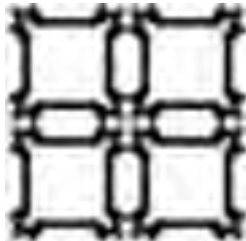
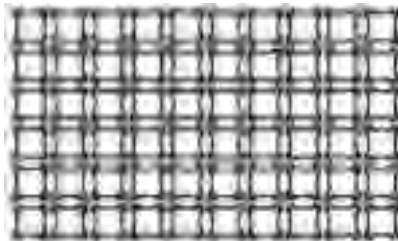
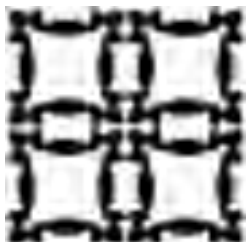
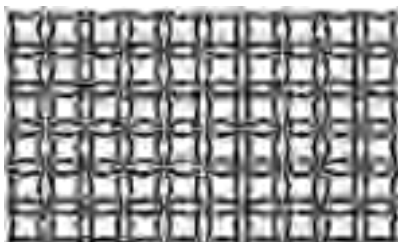
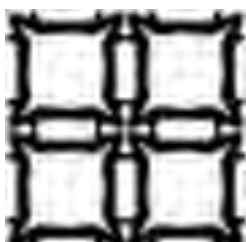
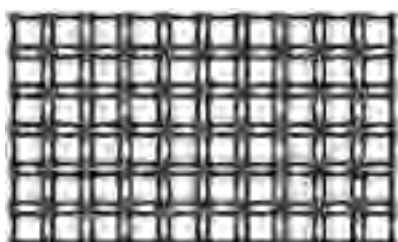
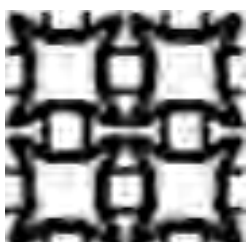
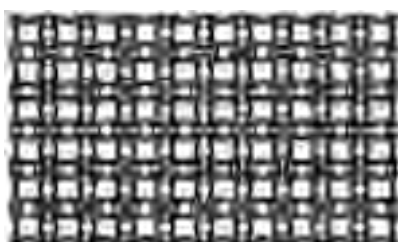
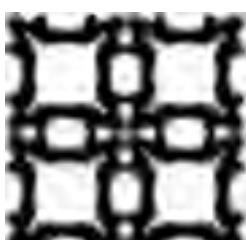
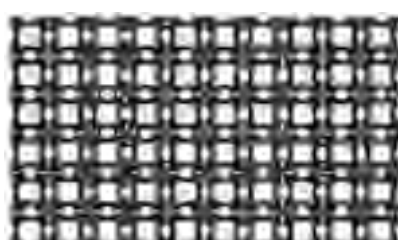
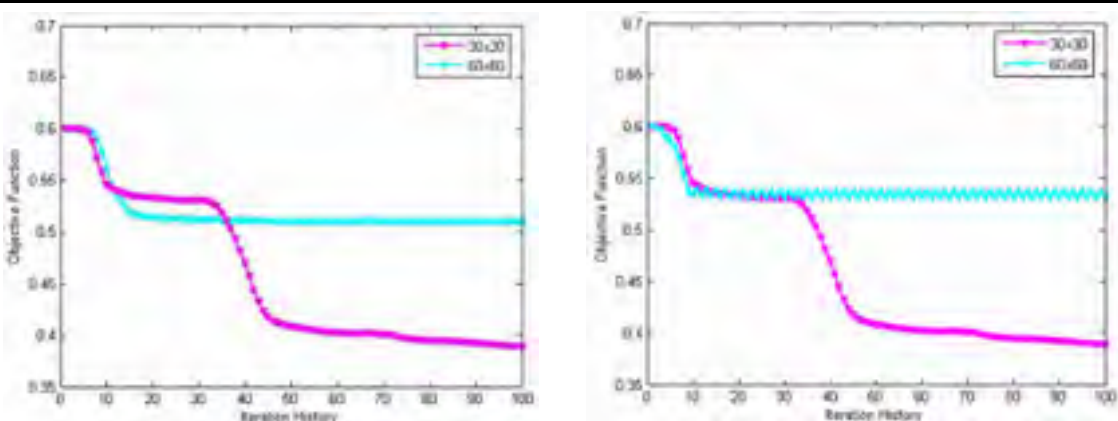
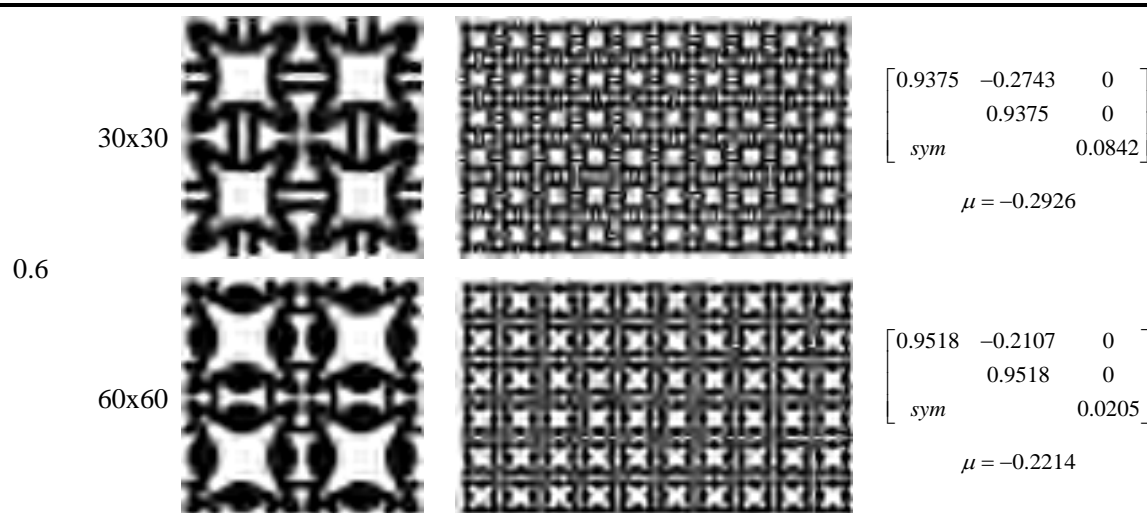


图 4.1 材料组分比 0.3、0.4、0.5、0.6 时不同网格数目下的目标函数值收敛曲线

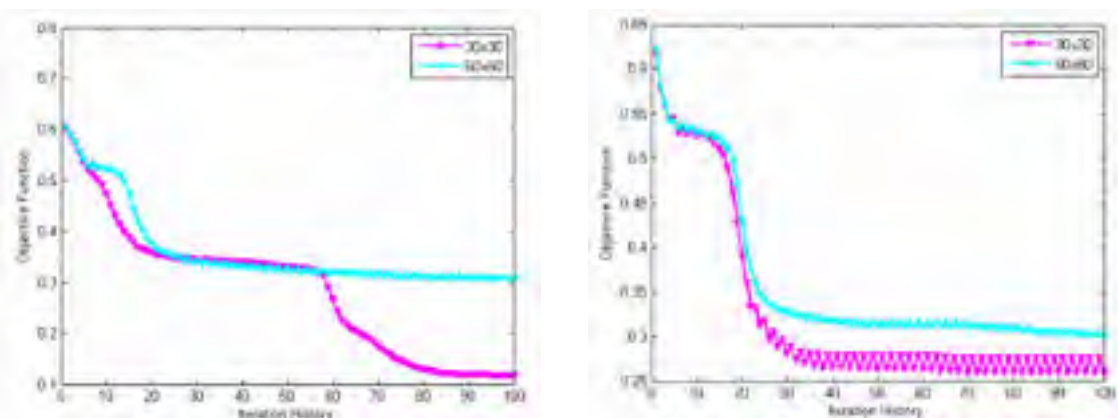


**表 4.2 有初始结构布局时具有极限负泊松比的微结构构型和相应的等效弹性矩阵**

材料组	网格数	最优拓扑构型		等效弹性系数矩阵
分比	目	单胞 1x1	单胞 3x5	及等效泊松比值
0.3	30x30			$\begin{bmatrix} 0.4255 & -0.092 & 0 \\ & 0.4249 & 0 \\ sym & & 0.0065 \end{bmatrix}$ $\mu = -0.2162$
	60x60			$\begin{bmatrix} 0.4204 & -0.0949 & 0 \\ & 0.4204 & 0 \\ sym & & 0.0076 \end{bmatrix}$ $\mu = -0.2257$
0.4	30x30			$\begin{bmatrix} 0.5963 & -0.1561 & 0 \\ & 0.5963 & 0 \\ sym & & 0.0148 \end{bmatrix}$ $\mu = -0.2617$
	60x60			$\begin{bmatrix} 0.7725 & -0.1597 & 0 \\ & 0.7725 & 0 \\ sym & & 0.0125 \end{bmatrix}$ $\mu = -0.2067$
0.5	30x30			$\begin{bmatrix} 0.8436 & -0.2834 & 0 \\ & 0.5812 & 0 \\ sym & & 0.0346 \end{bmatrix}$ $\mu = -0.3359$
	60x60			$\begin{bmatrix} 0.7439 & -0.2070 & 0 \\ & 0.7439 & 0 \\ sym & & 0.0426 \end{bmatrix}$ $\mu = -0.2783$



(a) 组分比 0.3 时不同网格下的目标收敛曲线 (b) 组分比 0.4 时不同网格下的目标收敛曲线



(c) 组分比 0.5 时不同网格下的目标收敛曲线 (d) 组分比 0.6 时不同网格下的目标收敛曲线

**图 4.2 材料组分比 0.3、0.4、0.5、0.6 时不同网格数目下的目标函数值收敛曲线**

由经典的弹性理论可知，材料的泊松比  $\mu$  的范围为：  $-1 < \mu < 0.5$ ，分析比较表 4.1 和表 4.2 中在不同材料组分比和不同网格数目下所得到的具有极限负泊松比微结构的最优拓扑构型和等效弹性系数矩阵，可以看出优化得到的微结构的最优拓扑构型均具有显著的负泊松比特性，其相应的泊松比值亦均未超过 -1，因此，利用拓扑优化技术，

基于能量均匀化方法可以实现具有极限负泊松比微结构的优化设计。

分析比较表 4.1 中优化得到的微结构的最优拓扑构型和相应的等效弹性系数矩阵,发现在不同的材料组分比下所得到微结构的最优拓扑构型和相应的等效弹性系数矩阵均具有较大差异,但其相应的等效泊松比值差别却不大,除在材料组分比为 0.5, 网格数目 30x30 所得的结果  $\mu = -0.6911$  之外,其等效泊松比值均位于 -0.5086-0.6099 之间;在相同材料组分比、不同的网格数目下,优化得到的最优拓扑构型具有一定的相似性,相应的等效弹性系数矩阵与等效泊松比值的差别也较小。

以微结构的等效泊松比值等于 -1 为优化目标的优化问题是一种高度非线性的优化问题,虽然在优化数学模型中将多个优化目标按权重因子进行加权处理, 但该问题仍属于一种较复杂的多目标优化问题,在优化过程中涉及到多个单目标的权衡和制约过程,所以在不同的材料组份比下,微结构的最优拓扑构型具有较大的差异,但其优化目标  $\mu = D_{12}^H / D_{11}^H = -1$  差异较小,均位于 -0.5086-0.6099 之间,这与前述对于以体积模量最大为优化目标的多目标优化问题的分析所得结论相一致。但不同的网格数目对于具有极限负泊松比微结构的最优拓扑构型的影响较小,其相应的等效泊松比值差别也较小。

图 4.1 为材料组分比分别为 0.3、0.4、0.5、0.6 时不同网格数目下的目标函数收敛曲线图。从图中可以看出在不同网格数目下目标函数值的收敛曲线差别不大,特别是材料组分比为 0.4 和 0.6 时。观察上述各图可以发现,随着迭代的进行,目标函数值均在逐步稳定地减小,在 40 步后均趋于收敛,但在迭代开始之初,目标函数值均会出现振荡,在迭代 15 步左右后,目标函数值才会迅速收敛。

表 4.2 中所示为有初始结构布局时具有极限负泊松比微结构的优化结果,具体的初始结构布局如图 4.3 中所示。

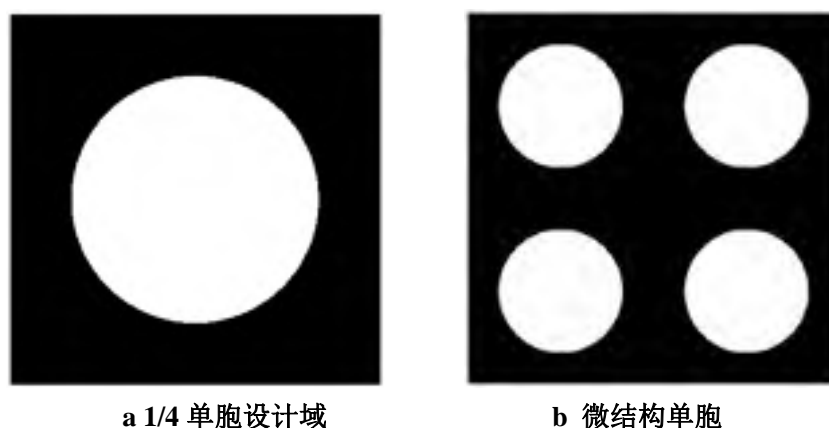


图 4.3 中心为圆孔的初始结构布局示意图

分析比较表 4.2 中所得微结构的最优拓扑构型可以发现,在不同的材料组份比和不同的网格数目下优化得到的最优拓扑构型具有高度的相似性,表明初始结构布局对

微结构的最优拓扑构型具有显著的指引性作用，在不同的材料组分比和网格数目下均能得到稳定的拓扑构型；比较其相应的负泊松比值，发现其差别也较小，除材料组分比为 0.5、网格数目 30x30 时所得泊松比  $\mu = -0.3359$  之外，其泊松比值均位于 -0.2067 到 -0.2926 之间，这与前述对于以体积模量最大为优化目标的较复杂多目标优化问题所得结果相吻合，即初始结构布局对于较复杂的多目标优化问题有着重要的影响，对其最优拓扑构型有显著的指引性作用，对最优目标值影响较小。

图 4.2 为材料组分比分别为 0.3、0.4、0.5、0.6 时不同网格数目下的目标函数收敛曲线图。从图中可以看出在网格数目为 60x60 时，其目标函数值在 12 步到 20 步之间会出现收敛，而网格数目为 30x30 时，其收敛速度则较慢。相比图 4.1 中无初始结构布局时的目标函数迭代曲线发现，有初始结构布局时其迭代过程较稳定，如在优化迭代之初，均不会出现类似于图 4.1 中的目标函数值振荡的现象，特别如图 4.2 中材料组分比为 0.5 和 0.6 时，在优化迭代之初，目标函数值便稳定迅速的逐步减小，没有出现目标函数值振荡的现象。

## 4.4.2 不同初始结构布局下具有极限负泊松比的微结构拓扑优化

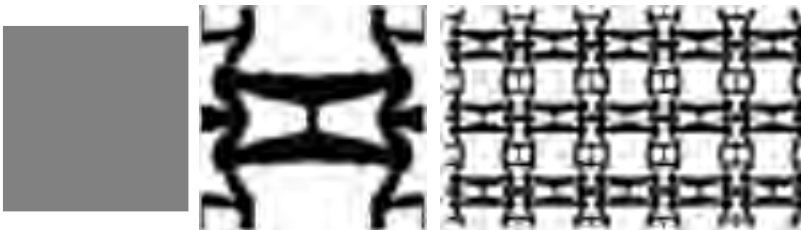
根据第三章所得结论，初始结构布局对于微结构的最优拓扑构型具有显著的指引性作用，对其优化迭代过程有着重要的影响。基于此，本文将在不同的初始结构布局下对具有极限负泊松比的微结构进行拓扑优化设计，以分析不同的初始结构布局对微结构最优拓扑构型的影响。选取实体材料的弹性模量  $E_0 = 9.1$ ，泊松比为  $\mu = 0.3$ ，为了优化求解的数值稳定性，选取孔洞区域的材料属性为弹性模量  $E^{void} = E_0 \times 10^{-6}$ ，泊松比  $\mu = 0.3$ 。材料组份比为 0.4，微结构设计域离散为 40x40 个单元，鉴于约束与载荷的对称性，选取整个微结构设计域的 1/4 建立有限元模型进行优化求解。为充分说明初始结构布局对以极限负泊松比为优化目标的微结构优化设计的影响，初始结构布局按照其几何对称性分为无初始结构布局（即材料均匀分布）、中心 1/4 对称、单轴对称、初始结构均匀化布局、初始结构布局不对称等五大类。如表 4.3 所示优化结果为在不同初始结构布局下，以极限负泊松比为优化目标的微结构的最优拓扑构型和其相应的等效弹性系数矩阵及等效泊松比值。如图 4.4 为表 4.3 中几种较具代表性的初始结构布局（无初始结构布局（initial=1）、中心 1/4 对称（initial=2）、单轴对称（initial=6）、均匀化布局（initial=7）、不对称（initial=10））的微结构构型的迭代演变图。

**表 4.3 不同初始结构布局对具有极限负泊松比微结构优化的影响**

初始 布局 的对称性	最优拓扑构型		等效弹性系数矩阵 及等效泊松比值
	单胞 1x1	单胞 3x5	
结构初始布局			



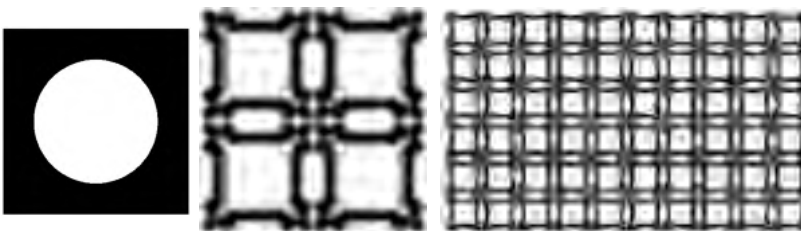
无初  
始结  
构布  
局



$$\begin{bmatrix} 0.7058 & -0.3636 & 0 \\ & 0.5240 & 0 \\ \text{sym} & & 0.0117 \end{bmatrix}$$

$$\mu = -0.5152$$

Initial=1

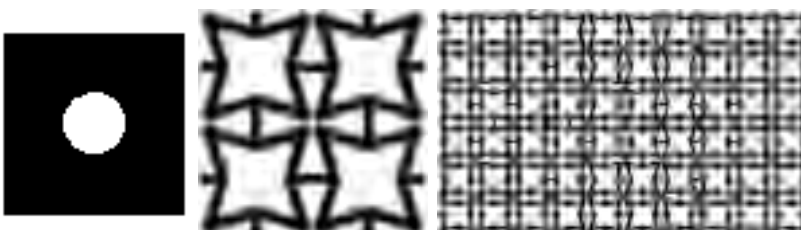


$$\begin{bmatrix} 0.4564 & -0.1119 & 0 \\ & 0.4564 & 0 \\ \text{sym} & & 0.0129 \end{bmatrix}$$

$$\mu = -0.2452$$

Initial=

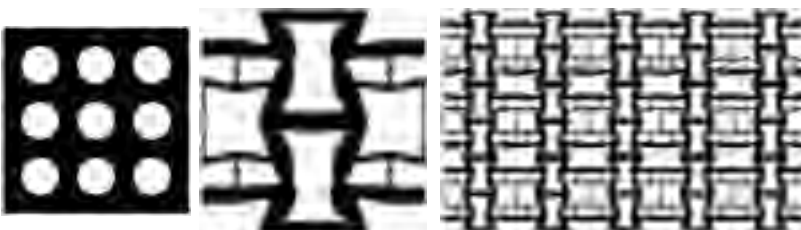
中心  
1/4 对  
称



$$\begin{bmatrix} 0.5076 & -0.1245 & 0 \\ & 0.5076 & 0 \\ \text{sym} & & 0.0128 \end{bmatrix}$$

$$\mu = -0.2452$$

Initial=3

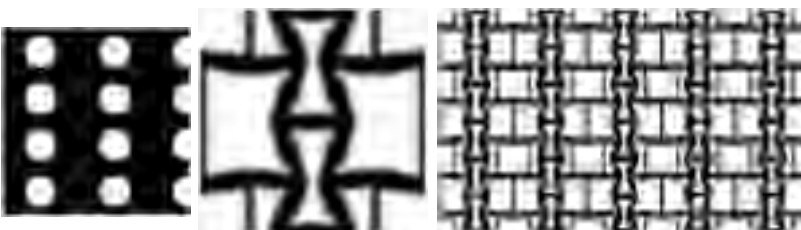


$$\begin{bmatrix} 0.6195 & -0.4281 & 0 \\ & 0.7808 & 0 \\ \text{sym} & & 0.0098 \end{bmatrix}$$

$$\mu = -0.6910$$

Initial=4

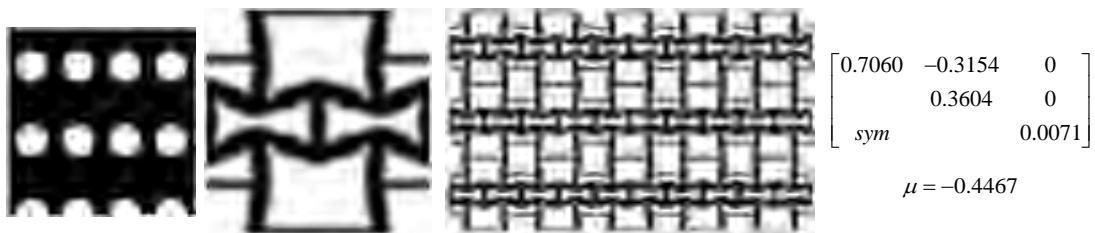
单轴  
对称



$$\begin{bmatrix} 0.3604 & -0.3154 & 0 \\ & 0.7060 & 0 \\ \text{sym} & & 0.0170 \end{bmatrix}$$

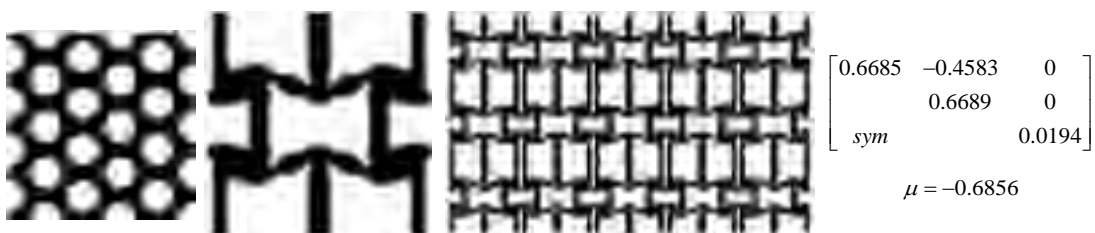
$$\mu = -0.8751$$

Initial=5

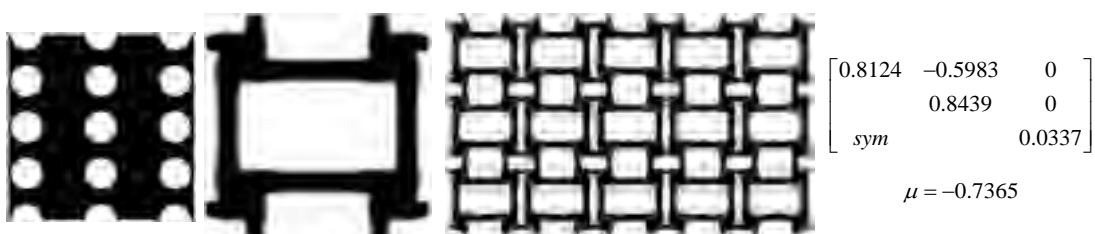


Initial=6

初始  
结构  
均匀  
化布  
局

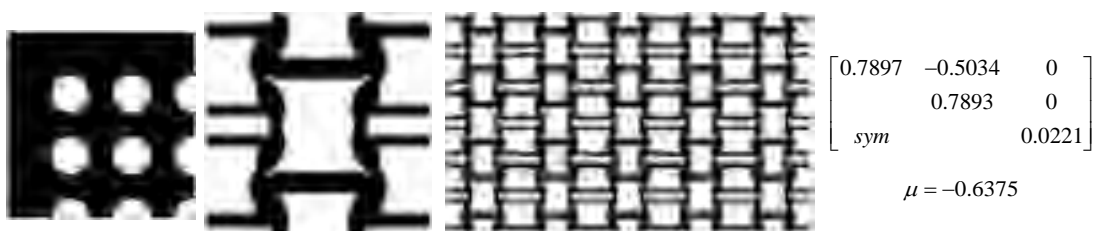


Initial=7

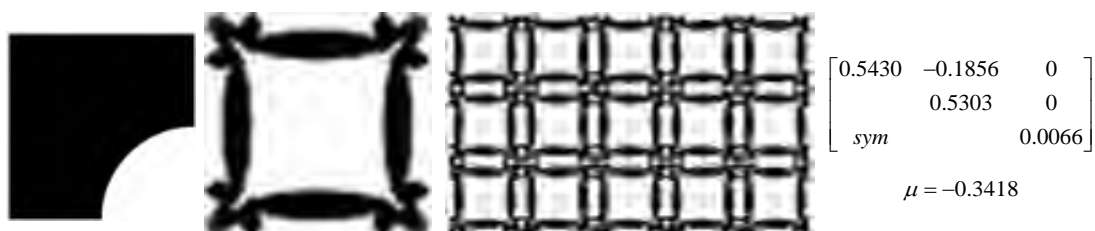


Initial=8

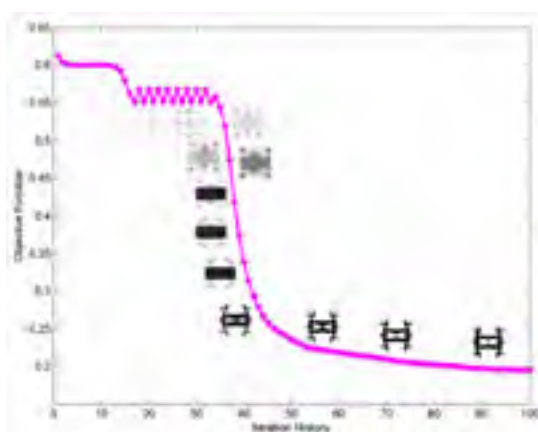
初始  
布局  
不对  
称



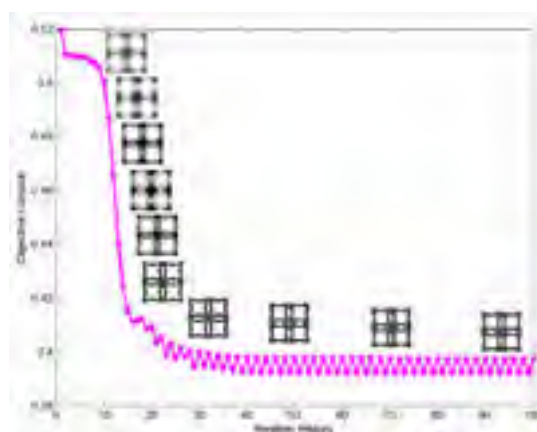
Initial=9



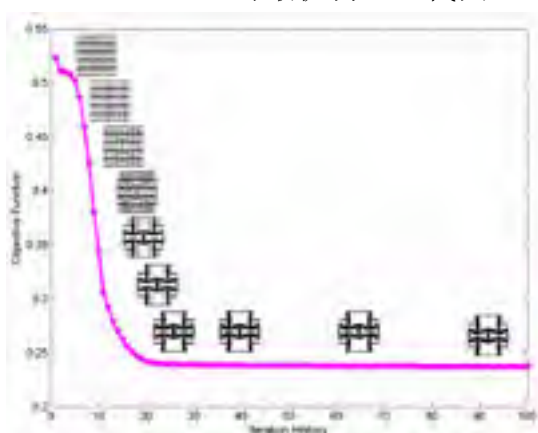
Initial=10



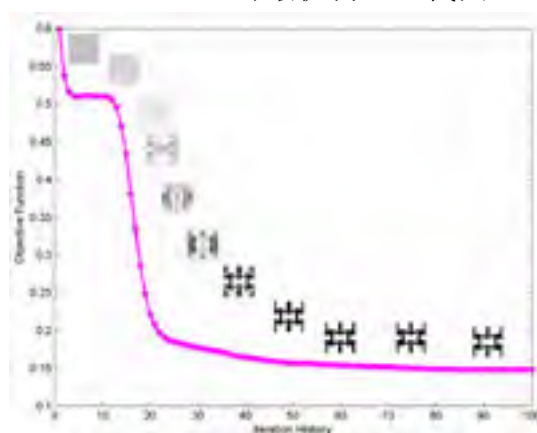
(a) initial=1 时最优构型迭代图



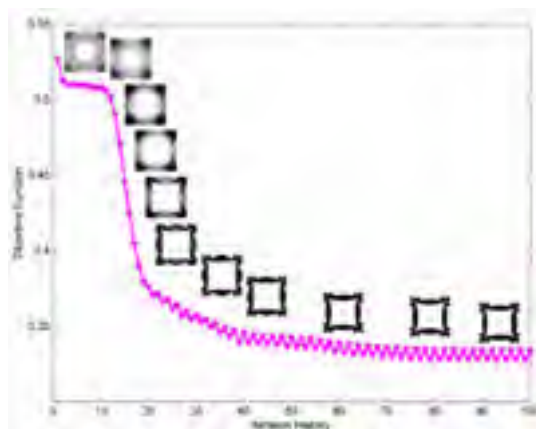
(b) initial=2 时最优构型迭代图



(c) initial=6 时最优构型迭代图



(d) initial=7 时最优构型迭代图



(e) initial=10 时最优构型迭代图

图 4.4 不同初始结构下微结构构型的迭代演变图

分析比较表 4.3 中不同初始结构布局下微结构的最优拓扑构型及其相应的等效弹性系数矩阵,发现不同的初始结构布局下所得的最优拓扑构型及相应的等效弹性系数矩阵具有较大的差异。但在初始结构布局 initial=2 与 initial=3 时所得微结构的最优拓扑构型具有高度的相似性,相应的等效弹性系数矩阵及等效负泊松比值相差也较小,因为 initial=2 与 initial=3 这两种初始结构布局高度相似;在初始结构布局 initial=10

时所得微结构的最优拓扑构型与初始结构布局  $\text{initial}=2$  时所得最优拓扑构型的  $1/4$  结构具有高度的相似性, 相应的等效弹性系数矩阵及等效负泊松比值相差也较小, 因为初始结构布局  $\text{initial}=10$  为初始结构布局  $\text{initial}=2$  的  $1/4$  结构, 所得的微结构构型仍为  $\text{initial}=2$  的  $1/4$  结构, 这也更加从侧面验证了初始结构布局对最优拓扑构型显著的指引性作用; 在初始结构布局  $\text{initial}=5$  与  $\text{initial}=6$  这两种不同的单轴对称初始布局下所得微结构的最优拓扑构型与等效弹性矩阵亦均具有相应的单轴对称性。这与前述对于以体积模量最大为目标的优化问题的分析所得结果相一致, 即不同初始结构布局下所得的最优拓扑构型差异明显, 且初始结构布局对于微结构的最优拓扑构型具有显著的指引性作用。但对于  $\mu = D_{12}^H / D_{11}^H = -1$  这种高度非线性的优化问题, 在不同的初始结构布局下其等效弹性矩阵具有较明显的差异, 所得的优化目标值仍具有一定的差异性。

## 4.5 本章小结

对于  $\mu = D_{12}^H / D_{11}^H = -1$  这种高度非线性的优化目标, 一般的优化算法很难实现, 本文通过预先设定目标弹性矩阵, 采取优化目标与预先设定目标平方差的加权组合最小为优化目标, 以材料的组份比为约束, 实现了具有极限负泊松比的材料微结构构型设计。算例分析表明, 不同材料组份比下的最优拓扑构型与等效弹性矩阵差异明显, 但其优化目标值  $\mu$  的差异较小, 在不同网格数目下的最优拓扑构型、等效弹性矩阵及优化目标值  $\mu$  的差异均较小; 不同初始结构布局对材料微结构的最优拓扑构型具有指引性作用, 使其优化迭代过程稳定。

## 5 总结和展望

### 5.1 全文总结

高技术的发展对材料性能提出了越来越高的要求,而某些需要的性能已经超出了自然界所能提供的范围,因此研发具有新的特殊性能的材料已成为学术界和工程界非常关注的课题。材料的微观结构对其宏观性能有很大的影响,通过对材料微观结构进行设计,可以获得具有极限宏观性能的材料和结构。本文基于应变能等效的能量法均匀化方法求解微结构的等效弹性性能,基于 **SIMP** 材料插值模型,并利用成熟的拓扑优化技术对具有极限弹性性能和极限负泊松比特性的材料微观构型进行优化设计。

本文主要的研究内容及成果如下:

1) 基于均匀化理论推导了材料微结构的等效弹性系数矩阵的求解过程,为能利用成熟的拓扑优化技术,将基于均匀化理论的等效弹性系数矩阵表达成基于应变能等效的能量表达式,然后根据推导的公式在 **Matlab** 中编写了求解微结构等效弹性性能的程序,通过与相关权威文献的计算结果进行对比,验证了本文基于能量均匀化方法求解材料微结构等效弹性性能的正确性和有效性;相关数值算例表明,对于材料组分比相同但截取自不同周期性结构的不同微结构单胞,其等效弹性性能差异明显,但不同的网格数目对微结构等效弹性性能的影响足以忽略,对于截取自同一周期性结构的不同微结构单胞具有完全相同的等效弹性性能,这对后续优化设计得到的具体微结构构型的判定具有一定的理论指导意义。

2) 基于 **SIMP** 材料插值模型,以材料微结构等效弹性系数矩阵中的某项或某几项分量加权组合最大作为优化的具体目标,以材料组分比为约束,实现了具有最大水平抗拉压刚度、最大竖直抗拉压刚度、最大抗剪切刚度、最大水平竖直双向模量之和以及最大体积模量的材料微结构的最优拓扑构型设计。数值算例表明,对于较简单的优化目标,如水平抗拉压刚度最大、竖直抗拉压刚度最大、抗剪切刚度最大、水平竖直双向模量之和最大,不同材料组份比和网格数目对最优拓扑构型、等效弹性矩阵及优化目标值的影响较小,对于较复杂的目标,如体积模量最大,不同材料组分比和网格数目对最优拓扑构型、等效弹性矩阵的影响较大,但对其最优目标值的影响较小;不同初始结构布局下的最优拓扑构型和等效弹性矩阵差异明显,特别对于如体积模量最大这种较复杂的目标,但其最优目标值差异较小,同时表明初始结构布局对材料微结构最优拓扑构型及优化迭代过程具有指引性作用。

3) 对于  $\mu = -1$  这种高度非线性的优化目标,本文通过预先设定目标弹性矩阵,采取优化目标与预先设定目标平方差的加权组合最小为优化目标,实现了具有极限负泊松比的材料微结构构型设计。算例分析表明,不同材料组份比下的最优拓扑构型与等效弹性矩阵差异明显,但其优化目标值  $\mu$  的差异较小,在不同网格数目下的最优拓



扑构型、等效弹性矩阵及优化目标值  $\mu$  的差异均较小；不同初始结构布局对材料微结构的最优拓扑构型具有指引性作用，使其优化迭代过程稳定。

## 5.2 研究展望

对具有特殊性能材料的研究已成为学术界与工程界非常关注的课题，而本文的工作主要集中在极限弹性性能与极限负泊松比的微结构优化设计方面，还有不少研究工作需要深入的开展：

### 1) 多功能复合材料的优化设计

由于实际工程应用中对材料与结构的性能要求已经涉及弹性性能、散热性能、电磁性能、热膨胀性能、隔音吸能以及隐身等多个领域，因此如何设计出满足实际工程应用的多功能复合材料微结构构型是下一步需要开展的研究。

### 2) 材料/结构的一体化设计

现有对于材料、结构的研究工作大都将材料设计与结构优化置于完全分离的状态，未能考虑在材料/结构一体化的优化设计中材料微观构型与宏观结构之间的反馈关系，不能充分发挥材料的潜在性能，因此如何构建材料/结构一体化的多尺度优化模型、设计宏观性能约束下的最优微观拓扑构型仍是下一步需要开展的研究。

## 参 考 文 献

- [1]Sigmund O. A new class of extremal composites[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000, 48(2): 397-428.
- [2]王斌, 阎军, 程耿东, 特定方向“零膨胀”的最小柔顺性结构优化设计[J], 计算力学学报, 2010(04): 577-582.
- [3]刘书田, 曹先凡, 零膨胀材料设计与模拟验证, 复合材料学报[J], 2005, 22(1):126-132.
- [4]汤亚男. 基于均匀化理论的材料微结构拓扑优化研究[D]. 湖南: 湘潭大学, 2011: 21-25.
- [5]袁振, 吴长春, 复合材料周期性线性微结构拓扑优化设计[J], 固体力学学报, 2003, 24(1): 40-45.
- [6]杨庆生. 复合材料细观结构力学与设计[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2000.
- [7]Hill R, Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. J. Mehc. Phys. Solids, 1963, 11: 357-372.
- [8]Paul B, Prediction of elastic constants of multiphase materials. Trans. AIME, 1960, 218: 36-41.
- [9]Hill R, Theory of mechanical properties of fiber strengthened materials: I. Elastic behaviour[J]. J. Mehc. Phys. Solids, 1964, 12: 199-212.
- [10]Hashin Z. On elastic behaviour of fiber reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry. J. Mehc. Phys. Solids, 1965, 13: 119-134.
- [11]Hashin Z, Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. J. Mehc. Phys. Solids, 1963, 11: 127-140.
- [12]Francfort GA, Murat F. Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal. 1986, 94: 307-334.
- [13]Milton GW. Variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites. J. Mehc. Phys. Solids, 1988, 36: 597-629.
- [14]Torquato S. Random heterogeneous media: microstructure and improved bounds on effective properties. Appl. Mech. Rev, 1991, 44: 37-76.
- [15]Eshelly JD. The elastic field outside ellipsoidal inclusion. Proc. Roy. Soc, 1959, A252:561-569.
- [16]Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials. J. Mehc. Phys. Solids, 1965, 13: 223-227.
- [17]Hill R. A self-consistent machanics of composite materials. J. Mehc. Phys. Solids,

1979, 27: 313-330.

[18]Christensen RM, Lo KH. Solution for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. J. Mech. Phys. Solids, 1979, 27: 315-330.

[19]Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions. Act. Metall, 1973, 21: 571-874.

[20]R M Christensen. A critical evaluation for a class of micromechanics models. J. Mech. Phys. Solids, 1990, 38: 379-404.

[21]Sanchez-Palencia E. Non homogeneous media and vibration theory[M]. Lecture Notes in Physics, 1980.

[22]Guedes JM, Kikuchi N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 1990, 83(2): 143-198.

[23]Matt Cf, Cruz ME. Calculation of the effective conductivity of ordered short-fiber composites. Aiaa Thermophysics Conference, 2001, 4(4):1-15.

[24]刘书田, 程耿东. 基于均匀化理论的复合材料热膨胀系数预测方法[J]. 大连理工大学学报, 1995, 35(5): 451-457.

[25]程耿东, 刘书田. 单相纤维复合材料导热系数预测[J]. 复合材料学报, 1996, 13(1): 78-85.

[26]Bendsoe M P, Sigmund O. Topology optimization: theory, methods and applications [M]. Springer Verlag, 2003.

[27]Park K S, Chang S Y, Youn S K. Topology optimization of the primary mirror of a multi-spectral camera[J]. Structural & Multidisciplinary Optimization, 2003, 25(1): 46-53.

[28]Sigmund O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization[J]. Mechanics of Structures & Machines, 1997, 25(4): 493-524.

[29]Emilio CNS, Fonseca JSO, Kikuchi N. Optimal design of periodic piezo-composites[J]. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 1998, 159(1): 49-77.

[30]Zhang WH. Recent advances in multicriteria optimization. The 4th world congress of structural and multidisciplinary optimization[C]. June 4-8, 2001, Dalian, China.

[31]王存福, 赵敏, 葛彤. 水下耐压结构拓扑优化设计方法探究[J]. 工程力学, 2015, 01: 247-256.

[32]聂昕, 黄鹏冲, 陈涛, 成艾国. 基于耐撞性拓扑优化的汽车关键安全件设计[J]. 中国机械工程, 2013, 23: 3260-3265.

[33]王凤稳. 复合材料等效性能计算及优化设计[D]. 西安: 西北工业大学, 2007:



15-16.

[34]Lakes. Foam Structures with negative poisson's ratio[J]. Science, 1987, 235: 10-38.

[35]Sigmund O. Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization approach. Int. J. Solids Struct, 1994, 31(17): 2313-2329.

[36]Sigmund O. Tailoring material with prescribed elastic properties[J]. Mechanics of material, 1994, 20: 351-368.

[37]Kalidindi SR, Houskanp M, Adams BL. Microstructure engineering in design[C]. Atlanta: 9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, 2002: 55-67.

[38]王宪杰. 基于改进 BESO 算法的多尺度多相材料并行优化设计[D]. 西安: 西北工业大学, 2015: 10-11.

[39]Sigmund O. Torquato S. Composite with extremal thermal expansion coefficients. Applied Physics Letters, 1996,69(21): 3203-3205.

[40]Vemaganti K, Rakshit A, Nuggehally M. Design of material with prescribed properties using topology optimization[J]. International Journal of solid and Structures, 2001, 38(40): 81-96.

[41]Gibiansky LV, Sigmund O. Multiphase composites with extremal bulk modulus[J]. Journal of the mechanics of solids, 2000,43(48):397-428.

[42]Neves MM, Rodrigues H, Guedes JM, Optimal design of periodic linear elastic microstructures[J]. Computer&Structures, 2000, 76: 421-429.

[43]Silva ECN, Fonseca JSO, Kikuchi N. Optimal design of piezoelectric microstructures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, 19:397-410.

[44]James K, Jeam H. Optimizing multifunctional materials: Design of microstructures for maximized stiffness and fluid permeability[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(22): 7028-7047.

[45]X Huang, A Radman, Y M Xie. Topological design of microstructures of cellular materials for maximum bulk or shear modulus[J]. Computational Materials Science, 2011, 50(6): 1861-1870.

[46]Sigmund O, Torquato S. Design with extreme thermal expansion using a three phase topology optimization method[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1997, 45: 1037-1067.

[47]Qi H, Kikuchi N, Mazumder J. Interface study and boundary smoothing on designed

compositite microstructures for manufacturing purposes . Struct. Multidiscip. O. 2004,26(5):326-332.

[48]Yin LZ, Yang W. Optimality criteria method for topology optimization under multiple constraints. Computers&structures, 2001, 97:1839-1850.

[49]Zhang Weihong, Wang Fengwen, Dai Gaoming, et al. Topology optimal design of material microstructures using strain energy-based method[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2007, 20(4): 320-326.

[50]Zhang Weihong, Dai Gaoming, Wang Fengwen, et al. Using strain energy-based prediction of effective elastic properties in topology optimization of material microstructures[J]. Acta Mechanica Sinica, 2007, 23(1): 77-89.

[51]张卫红, 汪雷, 孙士平. 基于导热性能的复合材料微结构性能复合材料设计[J]. 航空学报, 2006, 27(4): 1229-1233.

[52]程耿东, 刘书田. 单向纤维复合材料导热性预测[J]. 复合材料学报, 1996, 13(1): 78-85.

[53]刘书田, 程耿东. 用均匀化方法预测单向纤维复合材料热膨胀行为[J]. 复合材料学报, 1997, 14(1): 76-82.

[54]刘书田, 郑新广, 程耿东. 特定弹性性能材料的细观结构设计优化[J]. 复合材料学报, 2001, 18(2): 124-127.

[55]赵康, 郭旭, 丁佳. 基于拓扑描述函数的特定性能复合材料设计[J]. 力学学报, 2005, 37(5): 586-592.

[56]王宝来, 温凤春, 梁军. 轻质材料微结构构型的拓扑优化设计[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2009, 41(1): 76-79.

[57]王宪杰, 张洵安. 基于宏观性能的微观多孔材料拓扑优化[J]. 功能材料, 2014, 45(18): 18078-18082.

[58]程可鹏, 王宪杰, 张洵安. 周期性复合材料构型及结构一体化优化[J]. 应用数学和力学, 2015, 36(7): 725-732.

[59]刘远东, 尹益辉, 胡文军. 周期性复合材料微结构的多目标拓扑优化设计[J]. 机械强度, 2012, 34(4): 527-530.

[60]Lukkassen D, Persson LE. Some engineering and mathematical aspects on the homogenization method[J]. Composites Engineering, 1995, 5(5):519-531.

[61]Andreassen E, Clausen A, Schevenels M, Sigmund O. Efficient topology optimizatin in matlab using 88 lines of code[J]. Structrual & Multidisciplinary Optimizaiton, 2011, 43(1): 1-16.

- [62]Liang Xia, Piotr Breitkopf. Design of materials using topology optimization and energy-based homogenization approach in Matlab[J]. Structural & Multidisciplinary Optimizaiton, 2015,52(6): 1229-1241.
- [63]杜善义, 王彪. 复合材料微观力学[M]. 科学出版社, 1989.
- [64]Milton GW, Thien NP. New bounds on effective elastic moduli of two-component materials[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1982, 380(1779): 305-331.
- [65]孙士平. 材料与结构的拓扑优化关键理论与方法研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2006: 50-52.
- [66]黄智, 王万录, 廖克俊, 李正, 冯庆, 刘高斌. 具有负泊松比材料的研究进展[J]. 材料导报, 2002, 10: 49-51.
- [67]史炜, 杨伟, 李忠明, 谢邦互, 杨鸣波. 负泊松比材料研究进展[J]. 高分子通报, 2003, 06: 48-57.
- [68]杨智春, 邓庆田. 负泊松比材料与结构的力学性能研究及应用[J]. 力学进展, 2011, 03: 335-350.
- [69]Daeyoon Jung, Hae Chang Gea. Design of Negative Poisson's Ratio Materials Using Topology Optimization[C]. The 45th AIAA/ASME/ASCE Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 19-22 April, 2004, Palm Springs, California.
- [70]Sicong Shan, Sung H Kang, Zhenhao Zhao. Design of planar isotropic negative Poisson's ratio structures[J]. Extreme Mechanics Letters, 2015, 4: 96-102.
- [71]Giorgio Carta, Michele Brun, Antonio Baldi. Design of a porous material with isotropic negative Poisson's ratio[J]. Mechanics of Materials, 2016,97: 67-75.
- [72]W Miller, Z Ren, CW Smith. A negative Poisson's ratio carbon fibre composite using a negative Poisson's ratio yarn reinforcement[J]. Composites Science & Technology, 2012, 72(7): 761-766.
- [73]E Pasternak, AV Dyskin. Materials and structures with macroscopic negative Poisson's ratio[J]. International Journal of Engineering Science, 2012, 52: 103-114.
- [74]Igor Shufrin, E Pasternak, AV Dyskin. Planar isotropic structures with negative Poisson's ratio[J]. International Journal of Solids & Structures, 2012, 49(17): 2239-2253.
- [75]Yiqiang Wang, Zhen Luo, Nong Zhang, Zhan Kang. Topological shape optimization of microstructural metamaterials using a level set method[J]. Computational Materials Science, 2014, 87(2):178-186.

## 后 记

本文的研究工作是在导师杜义贤副教授的悉心指导下完成的。从论文选题、课题研究到论文的撰写都得到了导师的悉心指导和帮助，论文的字里行间都凝聚着导师的心血和汗水。是导师您带我走入结构拓扑优化的研究领域，并让我有机会接触本学科领域研究的最前沿；是导师您渊博的学识、博大的胸怀、严谨的治学态度、开拓的视野、敏锐的洞察力、谦虚宽厚的处世态度使我懂得了许多做人的道理。在我三年的硕士生涯中，导师您不仅在学术上指引着我，而且在生活上也给予了我无微不至的关怀，值此成文之际，特此向恩师您致以衷心的感谢及崇高的敬意。

感谢课题组的师兄们在课题研究和论文撰写中的指导和帮助。感谢同届的王涛、王成、童冠以及 M2529 工作室的师弟李涵钊、杜大翔、文小勇、汪巍巍、周幼辉、尹艺峰、周鹏、汪涛、黄超，师妹董群梅、梅月媛，在课题研究中所提供的无私帮助和宝贵意见。难忘和你们朝夕相处的日子，难忘每次讨论会大家积极热情的讨论，工作室团结向上的学习气氛和互相互助的同学关系更使我终生难忘。

感谢我的女友余竹玛，在六年并肩求学的道路上给予我的帮助和关怀，在我遇到困难、挫折和感到迷茫时对我不懈的支持和鼓励，让我走过重重困难，让我在人生的这段旅途倍感温暖。

感谢我的父母双亲和弟弟妹妹，正是你们对我在生活上无微不至的关心和精神上极大的支持和鼓励，为我创造了优越的学习生活条件使我得以顺利完成硕士学业，使我的求学生涯充实而愉快。

感谢所有关心和帮助过我的师长、亲人与朋友们！

最后，衷心感谢参与论文评审和答辩的各位专家教授在百忙之中抽出宝贵的时间对论文进行评阅和审议！

张严

2016 年 5 月于三峡大学

## 附录：攻读硕士学位期间发表的部分学术论著

1. 张严, 杜义贤, 杜大翔, 田启华. 极限弹性性能的材料微结构拓扑优化设计[J]. 三峡大学学报(自然科学版), 2016, 38(2): 71-74.
2. 杜义贤, 张严, 李涵钊, 田启华, 罗震. 具有极化特性的拓扑优化节点密度插值方法[J]. 机械设计 (录用).
3. 杜义贤, 张严. 具有逼近 0/1 离散特性的拓扑优化迭代算法[J]. 机械强度 (录用).

指 导 教 师 \_\_\_\_\_

学 科(系) 主 任\_\_\_\_\_

院 分 管 领 导\_\_\_\_\_