

# 轴向柱塞泵-电机组转子系统临界转速及不平衡响应分析

权凌霄<sup>1,2</sup>, 刘嵩<sup>3</sup>

(1. 燕山大学 河北省重型机械流体动力传输与控制实验室, 河北 秦皇岛 066004;

2. 燕山大学 先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室, 河北 秦皇岛 066004;

3. 燕山大学机械工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:** 临界转速及不平衡响应分析是采用转子动力学研究转子系统动态特性的基础。以斜盘式轴向柱塞泵-电机组转子系统为研究对象, 通过 Riccati 传递矩阵法、Prohl 传递矩阵法和有限元法分别对转子系统进行了临界转速的计算, 结果表明电机轴及联轴器的存在降低了轴向柱塞泵-电机组转子系统的临界转速, 并证明了 Riccati 传递矩阵法在计算大型转子系统的优势; 另外, 本文通过模拟流量脉动及侧向径向压力引起的转子不平衡状态, 得到转子系统的不平衡响应特性, 结果可表明, 流量脉动及侧向径向压力主要激发了转子系统的二阶固有频率, 其不平衡响应最剧烈处位于转子系统两端。

**关键词:** 轴向柱塞泵-电机组转子系统; 临界转速; 不平衡响应; Riccati 传递矩阵法; 有限元分析;

中图分类号: TH137;TH137.5;TH133.2;TP391.9 文献标志码: B 文章编号:

## Critical Speed and Unbalance Response Analysis for Turbine Shaft Rotor System of Swash-plate Axial Piston Pump

QUAN Ling-xiao<sup>1,2</sup>, LIU Song<sup>3</sup>

(1. Hebei Provincial Key Laboratory of Heavy Machinery Fluid Power Transmission and Control, Yanshan University,

Qinhuangdao, Hebei 066004;

2. Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science(Yanshan University), Ministry of Education of China,

Qinhuangdao, Hebei 066004;

3. School of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004)

**Abstract:** Critical speed and unbalance response analysis is the foundation of the research of rotor system based on rotor dynamics. The swash-plate axial piston pump with turbine rotor is researched, the critical speed is obtained by using the Riccati transfer matrix method, Prohl transfer matrix method and the ANSYS finite element analysis method respectively, which concludes that the turbine rotor with the coupling can reduce the critical speed of the rotor system and proves that the Riccati transfer matrix method has an advantage in calculating large rotor system; besides, the unbalance of the rotor system caused by flow pulsation and Radial and lateral pressure is simulated, the unbalanced response of rotor system is obtained, it is shown that the flow pulsation and Radial and lateral pressure mainly inspires the natural frequency for the second-order of the rotor system, and the most dramatic vibration occurs at the ends of the rotor system.

**Key words:** turbine shaft rotor system of swash-plate axial piston pump; critical speed; unbalance response; Riccati transfer matrix method; finite element analysis;

### 引言

“高速高压高功重比”是未来液压系统发展的趋势, 其中提高轴向柱塞泵的转速是研究工作的重点之一。轴向柱塞泵是结构最为复杂的液压元件, 其零部件种类数量繁多, 而且存在流固耦合现象, 导致其振动产生机理极为复杂<sup>[1]</sup>。同时, 轴向柱塞泵一般由电机驱动, 电机与泵之间还会安装联轴器作为传动元件。因此, 提高轴向柱塞泵转速应该把电机转子, 联轴器, 轴向柱塞泵主轴、缸体等旋转部件连同缸体轴承和支座作为整体(本文称其为“轴向柱塞泵-电机组转子系统”)进行分析, 研究其振动响应规律, 探索其振动产生机理。轴向柱塞

泵转动时受配流结构、外载荷、转子不对中以及安装精度等的影响, 必然存在偏心和不平衡, 导致轴向柱塞泵-电机组转子系统发生不可避免的振动<sup>[2]</sup>。当转子系统的转速从低速上升到某转速时, 会产生明显的径向不平衡离心力并引起共振, 使其发生剧烈振动, 此时的转速称为“临界转速”<sup>[3]</sup>。转子系

收稿日期:

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(50575196), 国家自然科学基金面上项目(4020445), 国家重点基础研究发展计划(973计划: 2014CB046405)。

作者简介: 权凌霄(1977—), 男, 陕西渭南人, 副教授, 博士, 主要从事液压系统振动及控制和智能化液压元件的科研和教学工作。

统的强烈振动对液压系统寿命产生极大危害，并严重影响操作人员身心健康。因此，如何提高轴向柱塞泵-电机转子系统的一阶临界转速成为研究重点。转子系统临界转速相对于最大工作转速需要有一定裕度范围，前者略大于后者。为了准确得到转子系统一阶临界转速其产生后的振动响应，达到优化一阶临界转速并降低振动幅值的作用，需要对其进行不平衡响应分析<sup>[4-5]</sup>。临界转速和不平衡响应分析都属于转子动力学研究范畴，也是研究轴向柱塞泵-电机转子系统的基础，对于液压系统减振降噪具有很好的指导意义。

国外的转子动力学研究始于 1869 年，Rankine 发表论文《On the centrifugal force of rotating shafts》，标志着转子动力学研究的开始<sup>[6]</sup>。但是直到 20 世纪 70 年代，有限元分析法被用于转子系统动力学建模和分析，转子动力学理论才开始飞速发展。印度理工学院的 T.R. Milind 教授将组合多体动力学 (MBD) 和有限元方法应用于轴向柱塞泵动力学分析和振动特性的模拟，并结合实验得到泵组件的模态振型和固有频率以及质量刚度对振动响应的影响<sup>[7]</sup>；伊朗科技大学的 S.Hosseini-Hashemi 教授介绍了一种求解自由振动旋转梯度圆柱壳动力学特性的解析方法，并将临界速度与材料特性的变化进行了讨论，最后用有限元模型验证了该解析方法的正确性<sup>[8]</sup>；巴西乌贝兰迪亚联邦大学的 T.S.Morais 教授对某转子系统的非线性特性进行了研究，并通过试验验证了伪随机优化法和有限元分析的正确性<sup>[9]</sup>。近几年，许多国内学者也做了大量研究。兰州理工大学的齐学义老师针对某多级离心泵转子，计算了支承刚度、陀螺力矩、流体软化等对转子系统的临界转速的影响，得到轴向应力对转子系统的临界转速影响较大的结论<sup>[10]</sup>。上海交通大学的王德忠教授利用 ANSYS 软件对大型屏蔽电机泵转子系统进行了动力学研究，得到了陀螺效应对临界转速计算结果影响较大，且各测点质量不平衡响应共振峰值小于横向振动设计限制的结论<sup>[11]</sup>。燕山大学的权凌霄老师提出将轴向柱塞泵主轴及缸体旋转组件作为转子系统进行临界转速分析，采用有限元分析法得到了增加轴承刚度及减小缸体质量可以有效提高轴向柱塞泵-电机转子系统的一阶临界转速的结论<sup>[12]</sup>，但该工作并未考虑电机转轴对整个转子系统的影响。

本文在文献[12]的研究基础上，进一步提出将电机转子、联轴器以及轴向柱塞泵旋转组件作为整体进行分析，通过 Riccati 传递矩阵法、Prohl 传递矩阵法及有限元法分析轴向柱塞泵-电机转子系统的临界转速，并与文献[12]的研究结果进行比较，得到电机轴及联轴器对轴向柱塞泵-电机临界转速的影响规律，并证明了 Riccati 传递矩阵法在分析大型转子动力学问题时比 Prohl 传递矩阵法更精确稳定；然后，应用 Riccati 传递矩阵法分析了转子系统不平衡响应，验证了临界转速求解的正确性，得到

了在各阶临界转速下流量脉动及侧向径向压力激发的各节点不平衡响应幅值。

## 1 轴向柱塞泵-电机转子系统的数学建模

### 1.1 离散化建模方法

图 1 所示为根据某型号轴向柱塞泵与电机、联轴器装配后得到的轴向柱塞泵-电机转子系统简化图。为便于研究，本文做如下假设：

- (1) 忽略联轴器安装非线性的影响；
- (2) 轴向柱塞泵的安装误差在一般工程安装允许范围内；
- (3) 各联接件之间安装为过盈配合；
- (4) 忽略配流盘和柱塞滑靴组件的作用；

于是可将该轴向柱塞泵-电机系统视为一个整体的转子系统，同时该转子系统不承受径向偏载作用。

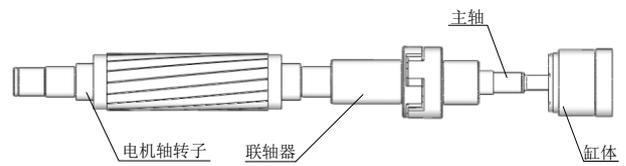


图 1 轴向柱塞泵-电机转子系统

依据转子动力学理论，对图 1 转子系统进行结点划分，得到图 2 所示的结点分布图，其中结点 3、13、20、21、25 为电机和轴向柱塞泵的轴承所在位置。

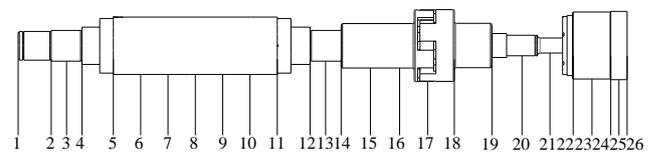


图 2 轴向柱塞泵-电机转子系统结点分布图

本文选取的轴向柱塞泵型号为 25SCY14-1b，其驱动电机型号为 Y-160M-4 11 KW，联轴器为 ML 型梅花形弹性联轴器。文献[12]已经给出了轴向柱塞泵各部件的材料属性参数，本文进一步测得了电机转子和联轴器的材料参数，其中，电机转子和联轴器主要材料为 45 号钢，密度为  $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、弹性模量为 210 GPa。

根据文献[12]的参数集总方法可以得到轴向柱塞泵-电机转子系统集总参数模型的各项参数如表 1 所示。

表 1 转子系统集总化模型参数表

结点号	轴段长度 $l_k$ mm	轴段质量 $m_k$ kg	极转动惯量 $J_{pk}$ kg cm <sup>2</sup>	直径转动惯量 $J_{dk}$ kg cm <sup>2</sup>	等效抗弯刚度 $EI$ N m <sup>2</sup>
1	48.4	0.2632	0.580	-0.737	31312
2	22.5	0.4036	0.850	-0.678	41264
3	22.5	0.2809	0.625	0.119	41264
4	46.0	0.6536	2.694	-3.063	134732
5	40.0	1.5813	13.068	33.057	454966
6	40.0	1.6582	13.937	65.278	454966

表 1 (续表)

7	40.0	1.6582	13.937	65.278	454966
8	40.0	1.6582	13.937	65.278	454966
9	40.0	1.6582	13.937	65.278	454966
10	40.0	1.6582	13.937	65.278	454966
11	48.0	1.7924	13.150	28.404	131901
12	22.75	1.1286	2.396	-3.177	41264
13	22.75	0.2840	0.719	0.115	41264
14	42.8	0.6995	3.303	-0.172	179629
15	42.8	1.1149	5.888	-0.459	179629
16	41.0	1.2876	7.210	-3.159	303366
17	39.0	2.4870	35.351	10.799	1223153
18	55.0	2.0445	22.096	4.054	179629
19	32.75	0.8362	3.986	-1.966	8151
20	22.5	0.1674	0.186	-0.107	3864
21	29.75	0.1302	0.143	-0.144	3480
22	34.0	0.2601	0.584	-1.179	2896
23	55.0	2.1890	25.562	3.368	928171
24	12.0	1.9983	24.172	3.789	1006291
25	12.0	0.7399	9.248	4.447	1006291
26	0	0.3699	4.624	2.224	0

## 1.2 轴承约束支撑的简化

在转子动力学分析中,通常将轴承和转轴作为一个系统进行分析,所以也需要对轴承约束进行简化建模。轴向柱塞泵支撑轴承为滚动轴承,其支撑刚度受很多因素影响,例如油膜刚度、轴承座及基础等的动力特性,以及轴承的旋转转速等。这些参数往往具有非线性和时变特性,因此难以确定。如果忽略阻尼影响,可以将其简化为弹性支承,文献[13]通过直接测试得到了C204JUT深沟球轴承的等效刚度,其刚度随转速增大而增大,当转速为4000 r/min到10000 r/min时,其等效刚度范围为 $2 \times 10^6$  N/m到 $1.4 \times 10^7$  N/m。在此基础上,本文结合文献[3]和文献[13],取电机轴承的支撑刚度为 $5 \times 10^6$  N/m,其它处支承刚度为 $2 \times 10^6$  N/m,得到转子系统集总参数模型如图3所示。

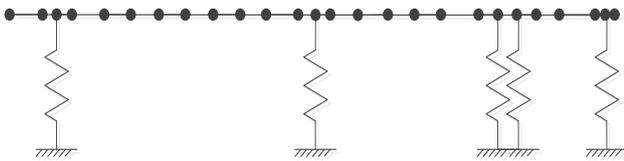


图 3 轴向柱塞泵-电机转子系统集总参数模型

## 2 Riccati 传递矩阵求解转子系统临界转速

### 2.1 Prohl 传递矩阵法和 Riccati 传递矩阵法

文献[12]中已经介绍了 Prohl 传递矩阵法,这种方法程序比较简单,运算快,并且具有矩阵维数不随系统自由度变化的而变化的优点,但在求解大型

转子的临界转速时,可能会出现数值不稳定、精确度低的问题。Riccati 传递矩阵法保留了 Prohl 传递矩阵法的所有优点,并且在计算大型转子系统上,数值更稳定精确。

### 2.2 Riccati 传递矩阵求解临界转速

对于每一个节点截面,令其状态向量为

$$\mathbf{Z}_i = [y, \theta, M, Q]_i^T \quad (1)$$

其中,  $y_i$ 、 $\theta_i$ 、 $M_i$  及  $Q_i$  分别为截面  $i$  处的挠度、斜率、弯矩和剪力,将状态向量  $\mathbf{Z}_i$  中 4 个元素分为  $\{f\}_i$ 、 $\{e\}_i$  为两组,即

$$\{f\}_i = [M, Q]_i^T \quad \{e\}_i = [y, \theta]_i^T$$

由于相邻两节点之间的状态向量存在递推关系,所以,有

$$\begin{Bmatrix} f \\ e \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} f \\ e \end{Bmatrix}_i \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} [u_{11}]_i &= \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i, [u_{12}]_i = \begin{bmatrix} l(m\Omega^2 - k) & (J_p - J_d)\Omega^2 \\ (m\Omega^2 - k) & 0 \end{bmatrix}_i \\ [u_{22}]_i &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{l^3}{6EI}(m\Omega^2 - k) & l + \frac{l^2}{2EI}(J_p - J_d)\Omega^2 \\ \frac{l^2}{2EI}(m\Omega^2 - k) & 1 + \frac{l}{EI}(J_p - J_d)\Omega^2 \end{bmatrix}_i \\ [u_{21}]_i &= \begin{bmatrix} \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} \\ \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \end{bmatrix}_i \end{aligned} \quad (3)$$

将(2)式展开得

$$\begin{cases} \{f\}_{i+1} = [u_{11}]_i \{f\}_i + [u_{12}]_i \{e\}_i \\ \{e\}_{i+1} = [u_{21}]_i \{f\}_i + [u_{22}]_i \{e\}_i \end{cases} \quad (4)$$

引入如下 Riccati 变换:

$$\{f\}_i = [S]_i \{e\}_i \quad (5)$$

则  $[S]_i$  就是待定的 Riccati 传递矩阵。它是一个待定的  $2 \times 2$  阶矩阵,将(5)代入(4)式中得

$$\{e\}_i = [u_{21}S + u_{22}]_i^{-1} \{e\}_{i+1} \quad (6)$$

$$\{f\}_{i+1} = [u_{11}S + u_{12}]_i [u_{21}S + u_{22}]_i^{-1} \{e\}_{i+1} \quad (7)$$

对比(5)和(7)式得

$$[S]_{i+1} = [u_{11}S + u_{12}]_i [u_{21}S + u_{22}]_i^{-1} \quad (8)$$

式(8)就是 Riccati 传递矩阵递推公式。由起始截面的边界条件  $\{f\}_1 = \{0\}$ ,  $\{e\}_1 \neq \{0\}$ , 故有初始条件  $[S]_1 = [0]$ , 代入(8)式中即可求得  $[S]_2$ , 然后依次递推可得到  $[S]_i$  ( $i=2,3,\dots,26$ )。对于末端节点 26 有

$$\{f\}_{26} = [S]_{26} \{e\}_{26} \quad (9)$$

由边界条件  $\{f\}_{26} = \{0\}$ ,  $\{e\}_{26} \neq \{0\}$  可知,式(9)有解的条件是

$$|S|_{26} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}_{26} = 0 \quad (10)$$

根据以上分析,按照图4流程在Matlab软件中编程求解。

经过软件计算后得到该转子系统的一阶临界转速为7067 r/min。同时,本文利用Prohl传递矩阵法求得系统临界转速为6945 r/min。

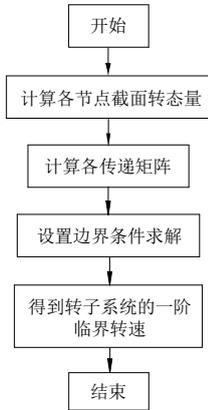


图4 振动系统求解程序流程图

### 3 转子系统临界转速有限元分析

#### 3.1 有限元模型建立及网格划分

利用SolidWorks按照实体比例画出转配体模型,并导入ANSYS Workbench中,设置材料属性,将轴承刚度视为常数,支撑认为视为各向同性,忽略其他次要因素的影响,采用自动网格进行网格划分,所划分的网格如图5所示。

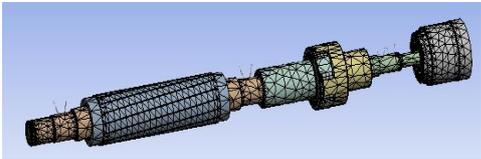


图5 转子系统有限元网格模型

#### 3.2 接触与约束条件设置

由于轴承在实际工作过程中轴向位移可以忽略,所以在轴肩处设置固支约束;根据上述分析,轴承支承可以简化为在相应位置添加等效刚度的弹簧接触;然后,设置转子系统转速范围为2000 r/min~10000 r/min,步长为2000 r/min。文献[12]给出轴向柱塞泵缸体安装轴承的约束设置方式,本文所研究的电机轴的轴承为6309Z2型深沟球轴承,与文献[12]的轴承约束型式基本一致,本文给出电机轴的约束条件设置如图6所示。

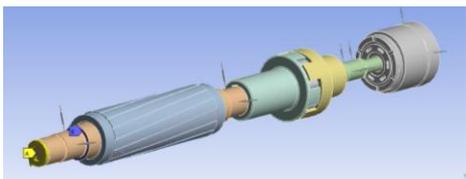


图6 电机轴约束条件设置

#### 3.3 利用坎贝尔图求解临界转速

在瞬态信号分析中,坎贝尔图是一种常用的方

法,利用坎贝尔图可以求出转子系统的临界转速,即一条从原点出发的等频线与各阶固有频率的交点。本文通过ANSYS Workbench分析得到的轴向柱塞泵-电机组坎贝尔图如图7所示。

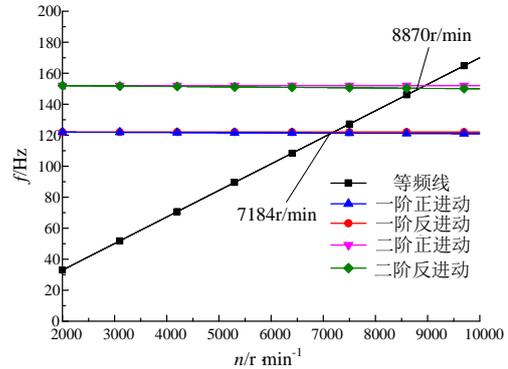


图7 轴向柱塞泵-电机组转子系统坎贝尔图

根据图7可以得到轴向柱塞泵-电机组转子系统的一阶临界转速为7184 r/min,二阶临界转速为8870 r/min。对比MATLAB分析结果,可以发现,该结果更接近利用Riccati传递矩阵法求出的一阶临界转速,误差仅1.5%,验证了在计算节点多,转速高的大型转子系统临界转速时,Riccati传递矩阵法具有精确度更高的特点。

同时,文献[12]中得到的不考虑电机轴、联轴器影响时,轴向柱塞泵-电机组转子系统的临界转速约7900 r/min,与轴向柱塞泵-电机组转子系统的临界转速对比可知,电机轴及联轴器使转子系统的一阶临界转速降低了10%,这为研究如何提高转子系统的临界转速提高了一定的理论依据。

### 4 转子系统不平衡响应分析

#### 4.1 转子系统不平衡响应有限元分析方法

由于转子系统在工作过程中存在不可避免的偏心和不平衡,而轴向柱塞泵进出油口的流量脉动和压力脉动会加剧这种现象,为了模拟出这种工况,根据文献[14]对同型号轴向柱塞泵流场分析可知,泵口流量脉动是一个类似于正弦函数的周期曲线,所以在进行有限元分析时,本文将流量脉动近似等效为随时间变化的正弦力,并施加在相应缸体处。

#### 4.2 转子系统不平衡力计算

在转子系统动、静平衡分析中,要求转子系统的不平衡度必须满足其平衡质量等级。根据GB/9239.1-2006《机械振动恒态(刚性)转子平衡品质要求》<sup>[15]</sup>,对于轴向柱塞泵,其平衡质量等级为G6.3,平衡精度为6.3 mm/s。回转件的许用不平衡度e与平衡精度等级的关系为

$$e = \frac{1000}{\omega} \times A \quad (11)$$

式中

$e$  —— 用偏心距  $e$  表示的许用不平衡度( $\mu\text{m}$ );

$A$  —— 平衡精度( $\text{mm/s}$ );

$\omega$  —— 回转体的最大角速度( $\text{rad/s}$ )

此外, 旋转角速度和转速之间有如下关系

$$\omega = 2\pi n / 60 \quad (12)$$

式中

$n$  —— 回转体的最大工作角速度( $\text{rad/s}$ )

将(12)代入(11)可得轴向柱塞泵-电机转子系统转子系统的最大许用不平衡度  $e$  为  $4 \times 10^{-5} \text{ mm}$ 。

回转体的不平衡力计算公式为:

$$F = me\omega^2 \quad (13)$$

本文所研究的轴向柱塞泵-电机转子系统质量  $m$  为  $25.8 \text{ Kg}$ , 其正常额定工作转速  $n$  为  $1500 \text{ r/min}$ , 最大许用平衡度  $e$  为  $4 \times 10^{-5} \text{ mm}$  代入式(13)得到回转体的最大许用不平衡力为  $25.5 \text{ N}$ 。

如图 8, 在轴向柱塞泵缸体表面中部 Y 向上施加不平衡力(按幅值一相位的方式输入不平衡力  $25.5 \text{ N}$ ,  $\alpha=0$ ), 在模态分析的基础上, 通过 ANSYS 的 Harmonic 分析模块即可得出转子在不平衡力下的振动响应。

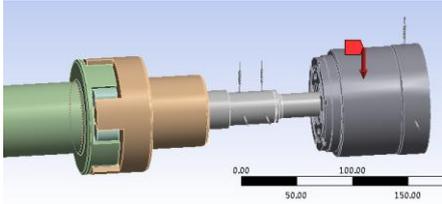


图 8 不平衡力加载位置

由图 7 中坎贝尔图可以看出, 该转子系统的一阶、二阶临界转速均在  $10000 \text{ r/min}$  内, 所以取激振频率为  $20 \sim 200 \text{ Hz}$ , 载荷子步为 5, 选用 Full 法(完全法)分析得出加载不平衡力处的幅频特性曲线如图 9 所示。

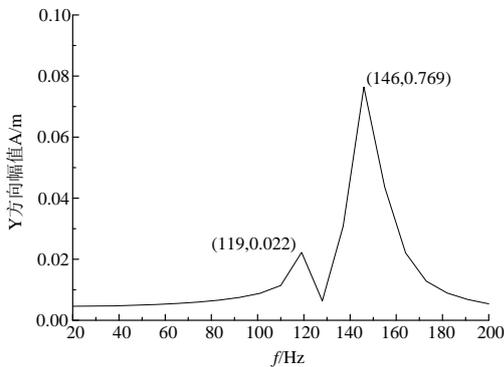


图 9 缸体处沿 Y 方向幅频特性曲线

可以看出, 该转子系统的一阶固有频率和二阶固有频率分别约为  $119 \text{ Hz}$  和  $146 \text{ Hz}$ , 与前面模态分析计算出的转子第一阶固有频率相一致, 进一步验证了前面利用传递矩阵法和有限元法计算转子系统临界转速的正确性, 对固有频率的计算比较精确。同时, 在不平衡力的激励下, 缸体的振幅在二

阶固有频率时最大, 在一阶固有频率时并不明显, 但仍然出现了振幅突变的情况, 说明了该不平衡力主要激发了缸体的二阶固有频率。

#### 4.3 不平衡响应的 Riccati 传递矩阵法

用 Riccati 传递矩阵法求解转子的不平衡响应, 对于起始截面为弹性支承的转子系统, 得到相邻截面间状态变量的关系为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{e} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{11} & \mathbf{u}_{12} \\ \mathbf{u}_{21} & \mathbf{u}_{22} \end{bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{e} \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_e \end{Bmatrix}_i \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_{11}]_i &= \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i, [\mathbf{u}_{12}]_i = \begin{bmatrix} l(m\Omega^2 - k) & (J_p - J_d)\Omega^2 \\ (m\Omega^2 - k) & 0 \end{bmatrix}_i \\ [\mathbf{u}_{22}]_i &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{l^3}{6EI}(m\Omega^2 - k) & l + \frac{l^2}{2EI}(J_p - J_d)\Omega^2 \\ \frac{l^2}{2EI}(m\Omega^2 - k) & 1 + \frac{l}{EI}(J_p - J_d)\Omega^2 \end{bmatrix}_i \\ [\mathbf{u}_{21}]_i &= \begin{bmatrix} \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} \\ \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \end{bmatrix}_i \end{aligned} \quad (15)$$

$$\{\mathbf{F}_f\}_i = U\Omega^2 [L, 1]_i^T$$

$$\{\mathbf{F}_e\}_i = U\Omega^2 \left[ \frac{l^3}{6EI}, \frac{l^2}{2EI} \right]_i^T$$

由于考虑转子为各向同性, 所以(14)变为

$$\begin{Bmatrix} M \\ Q \\ z \\ \theta \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & l & l(m\Omega^2 - k) & (J_p - J_d)\Omega^2 \\ 0 & 1 & (m\Omega^2 - k) & 0 \\ \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & 1 + \frac{l^3}{6EI}(m\Omega^2 - k) & l + \frac{l^2}{2EI}(J_p - J_d)\Omega^2 \\ \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^2}{2EI}(m\Omega^2 - k) & 1 + \frac{l}{EI}(J_p - J_d)\Omega^2 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} M \\ Q \\ z \\ \theta \end{Bmatrix}_i + U\Omega^2 \left\{ l \quad 1 \quad \frac{l^3}{6EI} \quad \frac{l^2}{2EI} \right\}_i^T \quad (16)$$

式中  $U = F(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ,  $\alpha$  为不平衡量的相位。

将(14)式展开得

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}\}_{i+1} &= [\mathbf{u}_{11}]_i \{\mathbf{f}\}_i + [\mathbf{u}_{12}]_i \{\mathbf{e}\}_i + \{\mathbf{F}_f\}_i \\ \{\mathbf{e}\}_{i+1} &= [\mathbf{u}_{21}]_i \{\mathbf{f}\}_i + [\mathbf{u}_{22}]_i \{\mathbf{e}\}_i + \{\mathbf{F}_e\}_i \end{aligned} \quad (17)$$

引入如下 Riccati 变换:

$$\{\mathbf{f}\}_i = [\mathbf{S}]_i \{\mathbf{e}\}_i + \{\mathbf{P}\}_i \quad (18)$$

其中  $[\mathbf{S}]_i$  和  $\{\mathbf{P}\}_i$  为待定的 Riccati 传递矩阵。把(18)代入(17)式中第二式得

$$\{\mathbf{e}\}_i = [\mathbf{u}_{21}\mathbf{S} + \mathbf{u}_{22}]_i^{-1} \{\mathbf{e}\}_{i+1} - [\mathbf{u}_{21}\mathbf{S} + \mathbf{u}_{22}]_i^{-1} [\mathbf{u}_{21}\mathbf{P} + \mathbf{F}_e]_i \quad (19)$$

把(18)、(19)式代入(17)式中第一式得

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}\}_{i+1} &= [\mathbf{u}_{11}\mathbf{S} + \mathbf{u}_{12}]_i [\mathbf{u}_{21}\mathbf{S} + \mathbf{u}_{22}]_i^{-1} \{\mathbf{e}\}_{i+1} + [\mathbf{u}_{11}\mathbf{P} + \mathbf{F}_f]_i \\ &\quad - [\mathbf{u}_{11}\mathbf{S} + \mathbf{u}_{12}]_i [\mathbf{u}_{21}\mathbf{S} + \mathbf{u}_{22}]_i^{-1} [\mathbf{u}_{21}\mathbf{P} + \mathbf{F}_e]_i \end{aligned} \quad (20)$$

对比(18)和(20)式, 可得如下的递推关系式:

$$[\mathbf{S}]_{i+1} = [\mathbf{u}_{11}\mathbf{S} + \mathbf{u}_{12}]_i [\mathbf{u}_{21}\mathbf{S} + \mathbf{u}_{22}]_i^{-1} \quad (21)$$

$$[\mathbf{P}]_{i+1} = [\mathbf{u}_{11}\mathbf{P} + \mathbf{F}_f]_i - [\mathbf{S}]_{i+1} [\mathbf{u}_{21}\mathbf{P} + \mathbf{F}_e]_i \quad (22)$$

因边界条件有  $\{\mathbf{f}\}_1 = \{0\}$ ,  $\{\mathbf{e}\}_1 \neq \{0\}$ , 由(18)式可得初始条件为

$$[\mathbf{S}]_1 = [0]; \{\mathbf{P}\}_1 = \{0\} \quad (23)$$

按此初始条件代入(21)式即可求得  $[\mathbf{S}]_2$ , 把  $[\mathbf{S}]_2$  代入(22)式即可求得  $\{\mathbf{P}\}_2$ 。利用(21)式和(22)式连续递推, 就可求得  $[\mathbf{S}]_i$  和  $[\mathbf{P}]_i$  ( $i=2,3,\dots,26$ )。由于末端截面 26 的边界条件为  $\{\mathbf{f}\}_{26} = \{0\}$ , 于是根据(18)可得

$$\{\mathbf{e}\}_{26} = -[\mathbf{S}]_{26}^{-1} + [\mathbf{P}]_{26} \quad (24)$$

这就是转子末端截面的位移向量, 再由(19)式从右往左递推, 就可求得任一截面的复数位移向量  $\{\mathbf{e}\}_i$  ( $i=25,24,\dots,1$ )。

根据实际情况在第 23 号节点处沿 Y 方向施加  $F=25.5\text{ N}(\alpha=0)$  的不平衡量, 利用 MATLAB 软件根据上述不平衡响应求解方法, 得到转子系统 23 号节点处沿 Y 方向上的不平衡响应曲线如图 10 所示。

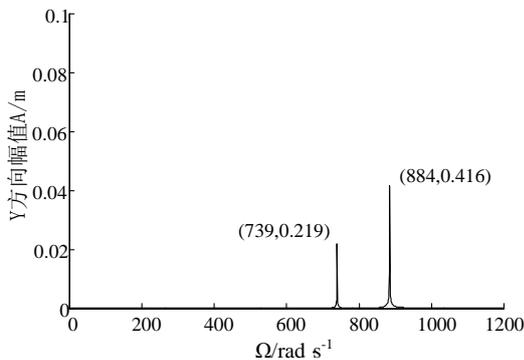


图 10 缸体处 Y 向幅频特性曲线

可以看出, 转子系统缸体处不平衡响应曲线在 739 rad/s(7057 r/min)和 884 rad/s(8442 r/min)左右出现峰值, 这个频率值与前面模态分析计算出的转子第一阶临界转速和二阶临界转速基本一致, 误差小于 6%, 证明了该方法的正确性。

为了更好的研究转子系统各个节点处不平衡的灵敏程度, 同样采用 MATLAB 软件根据上述不平衡响应求解方法, 得到一阶、二阶临界转速下的不平衡响应—节点曲线, 如图 11 所示。

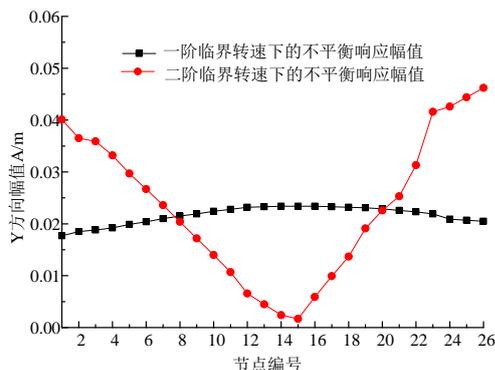


图 11 一阶临界转速下的不平衡响应—节点曲线

从图 11 可以看出:

(1) 不平衡响应幅值较大处均出现在二阶临界转速时, 说明了流量脉动及侧向径向压力主要激发了轴向柱塞泵-电机转子系统的二阶固有频率。

(2) 转子系统在一阶临界转速下各节点的不平衡响应幅值较为平稳, 在二阶临界转速下各节点的不平衡响应幅值差异较大, 且越靠近系统两端, 不平衡响应的幅值越大, 应进行合理优化。

## 5 结论

在研究轴向柱塞泵-电机转子的转子动力学问题时, 文献[12]忽略了电机轴和联轴器的影响。本文用传递矩阵法和有限元法分别求出了考虑电机轴轴向柱塞泵-电机转子系统的临界转速和不平衡响应, 得出了以下结论:

(1) 相对于 Prohl 传递矩阵法, Riccati 传递矩阵法在计算高速, 大型转子系统临界转速时具有更稳定, 精确度更高的优势。

(2) 电机轴及联轴器的安装降低了轴向柱塞泵的临界转速, 因此在进行高速轴向柱塞泵-电机转子设计时, 应对轴向柱塞泵-电机转子系统的动力学特性进行重点分析, 以避免其最大工作转速超过一阶临界转速, 进而产生强烈共振。

(3) 缸体上所受的流量脉动及侧向径向压力主要激发了轴向柱塞泵-电机转子系统的二阶固有频率, 为避免转子系统工作过程中振动过于剧烈, 在优化转子系统时应尽量提高二阶固有频率。

(4) 转子系统在一阶临界转速下不平衡响应较为平稳, 在二阶临界转速下振动最剧烈的是系统两端, 进行减振降噪时应重点关注这个部位。

此外, 由于本文在研究过程中进行了一些假设, 尤其没有考虑联轴器等安装非线性问题的影响, 结果与实际工作状态有一些差距, 后续研究应尽量符合实际工作状态。

## 参考文献:

- [1] 罗向阳, 权凌霄, 关庆生, 等. 轴向柱塞泵振动机理的研究现状及发展[J]. 流体机械, 2015, 43(8):41-45.  
LUO Xiangyang, QUAN Linxiao, GUAN Qingshen, et al. Review of Vibration of Axial Piston Pump[J]. Fluid Machinery, 2015, 43(8):41-45.
- [2] 权凌霄, 骆洪亮, 张晋. 斜轴式轴向柱塞泵壳体结构振动谐响应分析[J]. 液压与气动, 2014, 05: 33-39.  
QUAN Lingxiao, LUO Hongliang, ZHANG Jin. Harmonic Response Analysis of Axial Plunger Pump Shell Structure[J]. Chinese Hydraulics & Pneumatics, 2014, 05:33-39.
- [3] 袁惠群. 转子动力学基础[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2013.

- 
- YUAN Huiqun. Rotor Dynamics[M]. Beijing: Metallurgical Industry Press, 2013.
- [4] 汪爱明. 转子不平衡连续动力学分析方法及不平衡识别方法的研究[D]. 北京: 中国矿业大学, 2011.  
WANG Aiming. Research on the Continuous Dynamic Analysis of the Unbalanced Rotor-Bearing System and the Identification of the Unbalance[D]. Beijing: China University of Mining & Technology, 2011.
- [5] 孙红岩. 利用有限元进行转子系统的动力学分析[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2008  
SUN Hongyan. Dynamic Analysis of Rotor System Based on Finite Element Method[D]. Xi'an: Xi'an University of Architecture and Technology, 2008.
- [6] RANKINE W. J. M. On the centrifugal force of rotating shafts[J]. The Engineer, 1869.
- [7] MILIND T R, MITRA M. A Study on the Dynamics and Vibration Behavior of an Axial Piston Pump Using Combined MBD/FE Approach[J]. Procedia Engineering, 2016, 144:452-460.
- [8] HOSSEINI-HASHEMI S, ILKHANI M R, FADAEI M. Accurate natural frequencies and critical speeds of a rotating functionally graded moderately thick cylindrical shell[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2013, 76(6):9-20.
- [9] MORAIS T S, HAGOPIAN J D, STEFFEN V, et al. Optimization of unbalance distribution in rotating machinery with localized non linearity[J]. Mechanism & Machine Theory, 2014, 72(1):60-70.
- [10] 田亚斌, 齐学义. 轴向应力对多级离心泵转子临界转速的影响[J]. 农业机械学报, 2013, 05:55-58.  
TIAN Yabin, QI Xueyi. Influence of Axial Stress on Critical Rotational Speed of Multistage Centrifugal Pump Rotor[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 05:55-58.
- [11] 师名林, 王德忠, 张继革. 基于 ANSYS 的大型屏蔽电机泵转子系统建模及动力学分析[J]. 机械科学与技术, 2013, 03:358-361.  
SHI Minglin, WANG Dezhong, ZHANG Jige. Dynamic Analysis and Modeling of Large-scale Canned Motor Pump Rotor Based on ANSYS[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2012, 16: 153-156.
- [12] 权凌霄, 李东, 张文文, 等. 轴向柱塞泵主轴及缸体旋转组件临界转速分析[J]. 液压与气动, 2015, 10:12-17.  
QUAN Lingxiao, LI Dong, ZHANG Wenwen, et al. Critical Speed Analysis for Rotating Shaft and Cylinder Assembly of Axial Piston Pump[J]. Chinese Hydraulics & Pneumatics, 2015, 10:12-17.
- [13] 黄太平, 罗贵火, 苏卫民, 等. 滚动轴承动力特性测试方法[J]. 振动、测试与诊断, 1996, 16(4):31-36.  
HUANG Taiping, LUO Guihuo, SU Weimin, et al. Test Method of the Dynamic Characteristics of Rolling Bearing[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 1996, 16(4):31-36.
- [14] 张晋. 斜盘式轴向柱塞泵流体振动溯源研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2015.  
ZHANG Jin. The Source of Swash Plate Axial Piston Pump Fluid Vibration Research[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2015.
- [15] 李钟岩. ISO1940/1-1986(E)《机械振动——刚性转子平衡品质的要求——第一部分:许用剩余不平衡的确定》[J]. 试验机与材料试验, 1987, 03:32-45.  
LI Zhongyan. ISO1940/1-1986(E) 《 Mechanical vibration—Requirements of the quality of rigid rotor balance —the first part: determination of allowable residual unbalance》 [J]. Testing machine and testing materials, 1987, 03:32-45.
- 
- 通讯作者: 权凌霄  
通讯地址: 河北省秦皇岛市燕山大学, 邮编 066004  
电话: 13933507417  
邮箱: lingxiao@ysu.edu.cn  
文章要求: 审稿加急